

Hydro-mechanisches Spannungsmodell zur Beschreibung von Spannungen und Dehnungen beim Stranggießen

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Doktorgrades
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Lars Martens
aus Goch

genehmigt von der

Fakultät für Natur- und Materialwissenschaften
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung

05. Juli 2013

Vorsitzende der Promotionskommission:

Prof. Dr.-Ing. Barbette Tonn

Hauptberichterstatte:

Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Spitzer

Mitberichterstatte:

Prof. Dr.-Ing. Stefan Hartmann

Hiermit erkläre ich des Eides Statt, dass ich die bei der Fakultät für Natur- und Materialwissenschaften der Technischen Universität Clausthal eingereichte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe verfasst und die benutzten Hilfsmittel vollständig angegeben habe.

Saarbrücken, 03.02.2013

Lars Maier

Danksagung

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Metallurgische Prozesstechnik des Instituts für Metallurgie der Technischen Universität Clausthal.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Spitzer für die Möglichkeit der Anfertigung der Dissertation, sowie für die Unterstützung und Betreuung dieser Arbeit. Die interessanten Erörterungen gaben mir wertvolle Anregungen für die Durchführung dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Stefan Hartmann, Institut für Technische Mechanik, danke ich für die bereitwillige Übernahme des Koreferates und die damit verbundenen Mühen, sowie den hilfreichen und konstruktiven Hinweisen während der Entstehung dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt der Saarstahl AG für das große Interesse an dieser Arbeit, sowie deren Förderung. Ich danke den Herren Dr. Harste, Dr. Roth, Dr. Günther, Dr. Thome, Dr. Ostheimer, Dr. Brill, sowie der Abteilung Innovation Sekundärmetallurgie für das Interesse, die gute Zusammenarbeit und die tatkräftige Unterstützung.

Ich danke weiterhin den Kollegen und Mitarbeitern am Institut für Metallurgie für die angenehme und inspirierende Zusammenarbeit. Allen voran Herrn Dr. Wendelstorf, der sich meiner immer angenommen hat, vor allen Dingen in Rechner- und Literaturfragen.

Besonders möchte ich mich bei meiner Familie bedanken. Sie hat mich während der Entstehung dieser Arbeit immer wieder motiviert und mir dadurch den nötigen Rückhalt gegeben. Danke Lea, danke Sladjana!

Kurzfassung

Der Stranggießprozess ist ein kontinuierliches Gießverfahren, bei dem Stahl in eine wasser-gekühlte Kupferkokille vergossen und daran anschließend intensiv mit Wasser gekühlt wird, wobei die vollständige Erstarrung des Stahls erst weit im Bereich der Wasserkühlung erfolgt. Während des Gießprozesses unterliegt die erstarrende Strangschale im gesamten Prozessbereich thermo-mechanischen Belastungen, welche zu Oberflächen- und Gefügefehlern der Schale führen können. Spannungsmodelle, welche häufig mit der Finiten Elemente Methode umgesetzt werden, helfen dabei, die intensiven thermo-mechanischen Belastungen aufzuzeigen. Ein Problem dieser Modelle ist, dass sich das Gebiet der festen Phase, wegen der fortschreitenden Erstarrung der Strangschale, ständig ändert und somit in der Regel die flüssige Phase Teil des Bilanzraums der Spannungsrechnung sein muss. Ein weiteres Problem liegt in der dichtekonsistenten Formulierung der thermo-mechanischen Zustandänderung, wenn hohe Fließbewegungen und große Dichteänderungen auftreten. Die nach der Verformung durch mechanische und thermische Dehnungen resultierende Dichte des Materials muss nicht notwendigerweise der für diesen thermo-dynamischen Zustand geltenden Dichte entsprechen, da bei der Spannungsrechnung keine Masse bilanziert wird. Es ist daher in dieser Arbeit ein hydro-mechanisches Spannungsmodell für Erstarrungsvorgänge formuliert worden, welches beide Probleme löst. Das Modell koppelt mit Hilfe der Druck-Korrektur-Methode Impuls- und Massenbilanz miteinander, sodass der Spannungszustand stets massenkonsistent beschrieben wird. Des Weiteren resultiert aus der Druck-Korrektur-Methode der Druck, der nun nicht mehr über die Spannung, welche aus den verschiebungsabhängigen Materialgesetzen resultiert, bestimmt werden muss. Das ermöglicht es, den hydrostatischen Druck der flüssigen Phase zu modellieren. Die flüssige Phase kann somit ohne weitere Konditionen Teil des Bilanzraums der Spannungsrechnung sein. Das theoretisch formulierte hydro-mechanische Spannungsmodell ist an einem vereinfachten geometrischen Problem entwickelt und für dieses umgesetzt worden. Als Materialmodell ist im hydro-mechanischen Modells ein eindimensionales Vergleichsmodell entwickelt worden, welches mehrere Phasen mit unterschiedlichen Materialverhalten, die sich aus entsprechenden empirischen Versuchen ergeben, beschreiben kann. Der sich im Vergleichsmodell ergebende Spannungszustand muss auf den dreidimensionalen übertragen werden, wofür eine eigene iterative Rechenvorschrift notwendig war. Es ist dabei angenommen worden, dass sich das Material in allen Richtungen wie das eindimensionale Vergleichsmodell verhält.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der Stranggießprozess	3
3	Aufgaben- und Problemstellung	7
3.1	Stand des Wissens	7
3.2	Aufgabenstellung	10
4	Grundlagen des struktur- und hydromechanischen Spannungsmodells	11
4.1	Idee der kontinuumsmechanischen Modellierung	11
4.2	Wärmespannungsproblem der Festkörpermechanik	12
4.2.1	Impulsbilanz und Randbedingungen	12
4.2.2	Kinematische Beziehung	12
4.2.3	Konstitutive Materialgesetze	13
4.2.3.1	Elastische Dehnungen	13
4.2.3.2	Inelastische Dehnungen	13
4.2.4	Thermische Dehnung	15
4.3	Spannungsproblem in hydro-mechanischer Formulierung	15
4.3.1	Massen- und Impulsbilanz	15
4.3.2	Kinematische Beziehung des hydro-mechanisches Modells	16
4.3.3	Konstitutive Materialgesetze	16
4.3.3.1	Elastische Verzerrungsgeschwindigkeit	17
4.3.3.2	Inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit	17
4.3.3.3	Resultierende Differentialgleichung	18
4.3.4	Thermodynamische Dichte	18
4.3.5	Druckbedingter Dichteinfluss	19
5	Mehrphasiges Materialmodell des hydro-mechanischen Spannungsmodells	21
5.1	Mehrphasiges rheologisches Modell	21
5.1.1	Grundlagen des Materialmodells	21
5.1.2	Grundelementgleichungen des Materialmodells	22
5.1.3	Kombinationsvorschriften des rheologischen Modells	23
5.1.4	Resultierendes Gleichungssystem des rheologischen Modells	23
5.2	Kopplungsvorschrift zwischen ein- und dreidimensionalem Spannungsmodell . . .	24
5.2.1	Angleichung zwischen ein- und dreidimensionalem Materialmodell	24
5.2.1.1	Effektives visko-elastisches Materialmodell	24
5.2.1.2	Mehrphasiges visko-elastisches Materialmodell	25
5.2.2	Iterative Kopplungsvorschrift	25

6	Hydro-mechanisches Beispielproblem	27
6.1	Grundlagen des vereinfachten geometrischen Modells	27
6.2	Impulsbilanz des vereinfachten geometrischen Modells	28
6.2.1	Anfangsbedingungen der Impulsbilanz	28
6.2.2	Randbedingungen der Impulsbilanz	29
6.2.3	Umgebungsdruck als Verschiebungswiderstand	29
6.3	Massenbilanz des vereinfachten geometrischen Modells	30
6.3.1	Anfangsbedingungen der Massenbilanz	31
6.4	Modellierung des axialen Massestroms	31
6.4.1	Grundlegende Gleichungen zur Modellierung des axialen Massestroms .	31
6.4.2	Vereinfachte Übergangsformel	32
6.5	Wärmebilanz des vereinfachten geometrischen Modells	33
6.5.1	Anfangsbedingungen der Wärmebilanz	33
6.5.2	Randbedingungen der Wärmebilanz	34
6.5.3	Wärmeübergangskoeffizient	34
6.6	Modellannahmen der flüssigen Phase	35
7	Lösungsprozedur des hydro-mechanischen Modells	37
7.1	Instationäre Beschreibung	37
7.2	Temperaturfeld	38
7.2.1	Diskretisierung der Enthalpiebilanz	38
7.2.2	Linearisiertes Gleichungssystem des Temperaturproblems	39
7.3	Geschwindigkeitsfeld	40
7.3.1	Diskretisierung der Impulsbilanz	40
7.3.2	Linearisiertes Gleichungssystem des Geschwindigkeitsfeldes	41
7.4	Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung	41
7.5	Korrekturverfahren	43
7.5.1	Berechnung des Drucks	43
7.5.2	Bestimmungsgleichung des axialen Massestroms (flüssige Phase)	43
7.5.3	Bestimmungsgleichung des axialen Massestroms (feste Phase)	44
7.5.4	Verschiebungswiderstand	44
7.6	Übersicht Lösungsschema	45
8	Untersuchungen	47
8.1	Vergleich mit der analytischen Lösung nach Weiner und Boley	48
8.2	Abkühlungsrechnung: Kompressibilität	52
8.3	Massenbilanz	57
8.3.1	Massenbilanz: konstante Viskosität	58
8.3.2	Massenbilanz: konstanter Expansionskoeffizient	63
8.3.3	Massenbilanz: Eisenkohlenstofflegierungen	73
8.4	Erstarrungs- und Schrumpfungsverhalten von Eisen-Kohlenstoff-Legierungen .	82
8.4.1	Druckzustand in der flüssigen Phase	82
8.4.2	Prinzipielles Schrumpfungsverhalten der Eisenkohlenstofflegierungen . .	90
8.4.3	Spannungsorientierte Analyse des Schrumpfungsverhaltens	95
8.4.4	Erstarrungsrechnung mit konstanten Proportionalitätsvariablen	101

9 Zusammenfassung	105
A Materialmodell	109
A.1 Herleitung druckbedingter Dichteinfluss	109
A.2 Spannungstensor für Newtonsche Fluide	110
A.3 Herleitung Schubspannung des Mehrphasengefüges	111
A.3.1 Materialgesetz für lineare Elastizität	111
A.3.2 Materialgesetz für Viskosität	111
A.3.3 Schubspannung der Phase	111
A.3.4 Schubspannung des Mehrphasengefüges	112
B Temperaturbilanz	113
B.1 Diskretisierung	113
B.2 Ausformulierung Koeffizienten	115
B.3 Randbedingungen	115
B.3.1 Innenseite	115
B.3.2 Außenseite	116
C Impulsbilanz	117
C.1 Diskretisierung der Impulsbilanz	117
C.2 Ausformulierung Koeffizienten der Impulsbilanz	119
C.2.1 Koeffizient a_i der Impulsbilanz	119
C.2.2 Koeffizient b_i der Impulsbilanz	120
C.2.3 Koeffizient c_i der Impulsbilanz	120
C.2.4 Koeffizient d_i der Impulsbilanz	121
C.3 Randbedingungen der Impulsbilanz	121
C.3.1 Innenseite (Impulsbilanz)	121
C.3.2 Außenseite (Impulsbilanz)	122
D Materialdaten	123
D.1 Enthalpie von Eisen und Eisen-Kohlenstofflegierungen	123
D.1.1 Enthalpien der reinen Phasen	123
D.1.2 Enthalpien der Mischphasen	124
D.1.3 Enthalpien der heterogenen Gebiete	124
D.2 Wärmeleitfähigkeit von Eisen und Eisen-Kohlenstofflegierungen	125
D.2.1 Wärmeleitfähigkeit von reinen Eisen	125
D.2.2 Wärmeleitfähigkeit der Eisen-Kohlenstofflegierungen	125
D.3 Dichte von Eisen und Eisenkohlenstofflegierungen	126
D.3.1 Dichte von reinen Eisen und Zementit	126
D.3.2 Dichte von Eisenkohlenstofflegierungen	126
D.4 Thermische Dehnung	127
D.5 Elastizitätsmodul	128
D.6 Kriechgesetze	129
E Zweidimensionale FEM-Scheibe	131
Literaturverzeichnis	132

Abbildungsverzeichnis	137
Symbolverzeichnis	141
Lebenslauf	147

Kapitel 1

Einleitung

Das Stranggießverfahren ist seit seiner Entwicklung wegen seiner hohen Produktivität und seines hohen Ausbringens zu dem Standardverfahren zur Herstellung von kontinuierlich vergossenem Stahl geworden. Das grundlegende Prinzip dieses Verfahrens ist die hohe und schnelle Wärmeabfuhr aus dem Stahl über Kupferkokillen (Primärkühlung) und Spritzwasserkühlung (Sekundärkühlung). Insbesondere die im Kokillenbereich ablaufenden thermo-mechanischen Vorgänge in der Strangschale haben einen bedeutenden Einfluss auf die Prozesssicherheit des Verfahrens und die Qualität der Produkte. So liegt der Entstehungsort von Rissen beispielsweise oft im Kokillenbereich.

Zur Optimierung der Prozessführung ist daher die Kenntnis des thermo-mechanischen Verhaltens der erstarrenden Strangschale notwendig. Die Messung von Eigenspannungen, Temperaturen oder des Schrumpfungsverhalten der erstarrenden Schale ist im laufenden Prozess jedoch nicht möglich. Diese Tatsache erfordert die Anwendung von Prozessmodellen. Der Stranggießprozess ist auf Grund seines großen Berechnungsgebietes und den komplexen physikalischen Vorgängen aber nur mit Modellen zu simulieren, die einen Teilbereich des Gesamtprozesses darstellen. So existieren zum Beispiel Strömungs-, Temperatur-, Phasen-, Spannungs-, und Ausscheidungsmodelle, die teils unabdingbar miteinander gekoppelt sind oder deren Kopplung Ziel von Entwicklungen ist.

Modelle zur Berechnung des Spannungszustands der erstarrenden Strangschale sind thermo-mechanische Modelle. Diese lassen sich allgemein in stationäre und instationäre Modelle einteilen, zudem in thermisch gekoppelte und thermisch entkoppelte Modelle. Für instationäre thermisch gekoppelte Modelle tritt dabei generell das Problem auf, dass die Lage der Erstarrungsfront vor der Rechnung nicht bekannt ist. An der Erstarrungsfront ändert sich das Festkörpergebiet durch anwachsendes Material oder durch Abschmelzvorgänge ständig, was zur Folge hat, dass sich somit auch das Berechnungsgebiet der Spannung ständig ändert.

Eine häufig benutzte Methode zur Berechnung der beim Stranggießen entstehenden Spannungen ist die Methode der Finiten Elemente (FEM), und zwar auch für instationäre thermo-mechanische Modelle. Damit bei diesen der wachsende Festkörperbereich modelliert werden kann, ist es normalerweise bei kommerziellen FEM Software-Paketen notwendig, alle Elemente für das gesamte Rechengebiet vor dem Start der Rechnung zu definieren. Das Rechengebiet schließt somit nicht nur die erstarrte Strangschale, sondern auch die flüssige Phase mit ein, die dadurch mit Festkörperelementen modelliert werden muss. Diese Elemente dürfen die Spannungsrechnung der erstarrten Schale nicht beeinflussen, indem sie selber Kräfte aufnehmen

und damit sich und die Schale verzerren. Auf der anderen Seite müssen die Elemente Kräfte aufnehmen können, um eine dem hydrostatischen Druck entsprechende Kraft auf die erstarrte Strangschale auszuüben. Dieser Widerspruch macht einen modellierungstechnischen Mehraufwand für die Elemente der flüssigen Phase notwendig.

Ein weiterer Aspekt bei der Spannungsrechnung für Erstarrungsvorgänge ergibt sich aus der Berechnung des thermo-mechanischen Zustandes der Schale selber. Die Anwendung der konstitutiven Materialgesetze der Festkörpermechanik sieht bei den Stranggießmodellen üblicherweise eine additive Zerlegung der Dehnungen in mechanische und thermische Anteile vor. Stahl erfährt im Hochtemperaturbereich große Dichteänderungen, was zu hohen thermischen Dehnungen führt. Zusätzlich ist Stahl im Hochtemperaturbereich sehr niedrigviskos, was wiederum zu hohen mechanischen Dehnungen führt. Es besteht nun die Gefahr, dass auf Grund der hohen Dehnungsänderungen der thermo-mechanische Zustand nicht dichtetreu beschrieben wird. In die Berechnung der thermischen Dehnung geht als Hilfsgröße die Dichte (Ausgangsdichte) ein. Eine aus dem resultierenden Verschiebungsfeld der Spannungsrechnung berechnete Dichte, wird im Allgemeinen nicht mit der Ausgangsdichte übereinstimmen. Die Dichteänderung ist eine der Hauptursachen für thermo-mechanische Spannungen beim Stranggießen, sodass eine präzise Wiedergabe bedeutend ist für Stranggießmodelle.

Es ist daher das Ziel dieser Arbeit ein thermo-mechanisches Modell für die Spannungsrechnung bei Erstarrungsvorgängen zu entwickeln, bei dem der thermo-mechanische Zustand massenkonsistent wiedergegeben wird. Darüber hinaus soll in dem Modell die flüssige Phase ohne modellierungstechnischen Mehraufwand Teil des Bilanzraums der Spannungsrechnung sein. Die Basis des neuen Modells ist die aus der Strömungsmechanik bekannte Druck-Korrekturmethode, die aus der iterativen Bilanzierung der Masse einen Druckzustand bestimmt. Die Einbeziehung des Drucks in die Spannungsrechnung macht eine Anpassung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen erforderlich. Sie ermöglicht es aber, einen Druckzustand unabhängig von Verschiebungen einzustellen und somit den hydrostatischen Druck der flüssigen Phase.

In die Arbeit führt das **Kapitel 2** mit einer kurzen Beschreibung des Stranggießprozesses ein. Das **Kapitel 3** erörtert dann die in der Literatur verwendeten FEM-Stranggießmodelle in Hinsicht auf die Modellierung der flüssigen Phase und des hydrostatischen Drucks. Unter Berücksichtigung der kontinuumsmechanischen Grundlagen stellt das **Kapitel 4** den neuen methodischen Ansatz vor. Die Umsetzung des neuen Modells ist auf Grund des Aufwandes für ein dreidimensionales Modell an einem vereinfachten Spannungsmodell durchgeführt worden. Wegen fehlender transparenter Softwaretools ist das Modell in einem eigenen Programm in der Programmiersprache FORTRAN 77 umgesetzt worden. Die sich für das Modell ergebenden Bilanzgleichungen und Modellannahmen sind im **Kapitel 6**, das angepasste Materialmodell im **Kapitel 5** und das numerische Lösungsverfahren im **Kapitel 7** aufgeführt. Sowohl das Materialmodell als auch das numerische Lösungsverfahren sind Konzepte und mit neuen Modellen und Methoden umgesetzt worden. Das **Kapitel 8** zeigt die mit dem Modell erarbeiteten Ergebnisse, welche einen Vergleich mit einer analytischen Lösung, mit FEM-Rechnungen des Programms ABAQUS und mit Schrumpfungsmessungen einschließen. Das **Kapitel 9** schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung ab.

Kapitel 2

Der Stranggießprozess

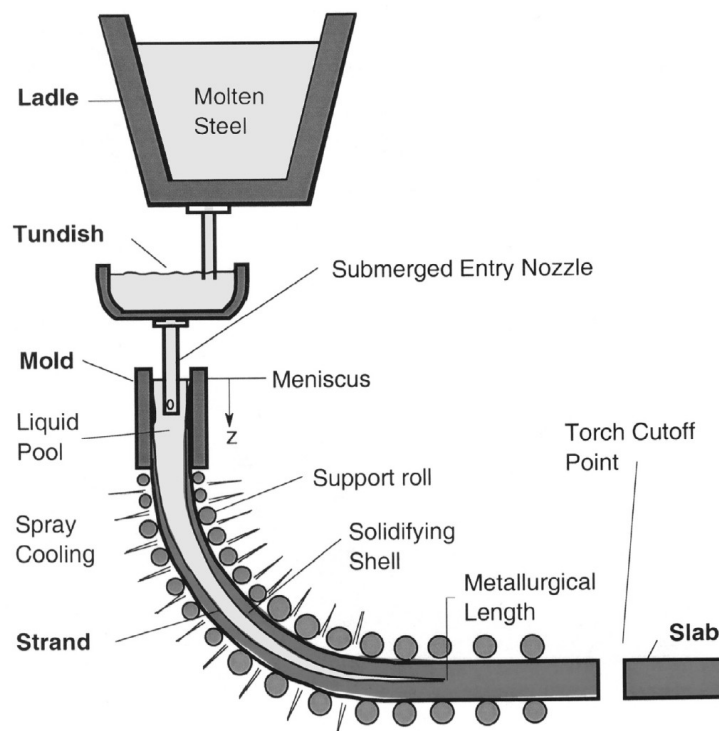


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Stranggießprozesses, aus Thomas [Tho03]

Das Stranggießen ist ein kontinuierlicher Produktionsprozess, bei dem flüssiger Stahl in einem Endlosstrang vergossen wird, Abbildung (2.1). Der flüssige Stahl wird aus einer Pfanne (ladle) heraus über einen Verteiler (tundish) in eine Kokille (mold) gegossen. Das Vergießen des Stahls in eine wassergekühlte Kupferkokille führt zur Bildung einer ersten festen Randschale (solidifying shell), die nach dem Verlassen der Kokille so tragfähig sein muss, dass ein Durchbrechen in der Sekundärkühlzone vermieden wird. Die Rohstrangoberfläche wird in dieser Zone intensiv mit Wasser gekühlt (spray cooling). Die vollständige Durcherstarrung des Stahls findet aber erst in der Sumpfspitze statt. Diese ragt mehrere Meter in die Sekundärkühlzone hinein (metallurgical length). Das Produkt (Bramme, Knüppel oder Vorblock) wird zum Schluss des Prozesses vom Endlosstrang getrennt (torch cutoff point). Die erstarrende Strangschale unterliegt im gesamten Prozessbereich thermo-mechanischen Belastungen, die bei der Spannungsrechnung berücksichtigt werden müssen.

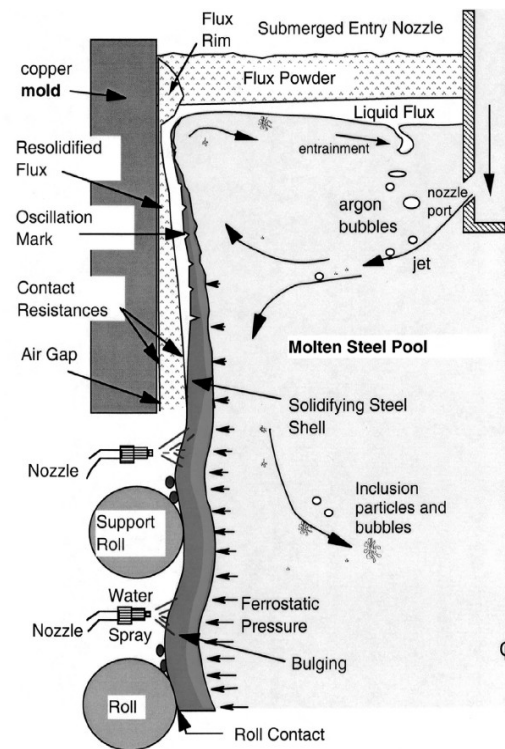


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Kokillenbereichs, aus Thomas [Tho03]

Wichtig für die Prozesssicherheit ist die Ausbildung einer festen Randschale im Kokillenbereich, Abbildung (2.2). Ein Vergießen von Stahl über Kupferkokillen ist nur möglich, wenn die Kokille geschmiert wird. Aus diesem Grund wird Gießpulver auf die Stahloberfläche in der Kokille aufgegeben, das nach dem Aufschmelzen in den Spalt zwischen Strang und Kokille fließt. Darüber hinaus oszilliert die Kokille, um Anhaftungen des Strangs an der Kokille zu vermeiden und ein Speisen des Zwischenraums mit flüssiger Gießpulverschlacke zu gewährleisten. Das Gießpulver soll darüber hinaus den Wärmeübergang zwischen Strang und Kokille homogenisieren.

Der thermo-mechanische Zustand der Strangschale im Kokillenbereich ist im wesentlichen durch die Wärmeabfuhr in die Kokille geprägt. Die Wärmeabfuhr kann zum Beispiel durch eingezogenes Gießpulver gestört sein, sodass es zu einem lokalen Wiederaufschmelzen der erstarrten Schale kommen kann. Ist der Schmierfilm inhomogen oder die thermisch bedingte Schrumpfung der Strangschale lokal erhöht, kann es zu einer (Luft-) Spaltbildung zwischen Strang und Kokille kommen, die den Wärmestrom aus der Strangschale herabsetzt und so die Gefahr von Durchbrüchen erhöht. Eine ungleichmäßige Wärmeabfuhr aus der Strangschale verzerrt die Geometrie des Strangs und führt zu Innen- und Oberflächenrissen. Aber nicht nur die Wärmeabfuhr in die Kokille, sondern auch die chemische Zusammensetzung der Stahllegierung bestimmt das Schrumpfungsverhalten der Strangschale. So schrumpfen peritektische Stähle, wegen der besonderen temperaturabhängigen Dichteentwicklung, stärker als höher kohlenstoffhaltige Legierungen. Die Modellierung der Spannungen im Kokillenbereich ist somit im wesentlichen durch das Schrumpfungsverhalten des Stahls bestimmt.

Das gesamte Schrumpfungsverhalten des Stahls ist aber nicht nur für den Wärmeübergang zwischen Strang und Kokille verantwortlich, sondern auch für den Eigenspannungszustand des

Stahls und das im gesamten Prozessbereich. Zu hohe Eigenspannungen führen zu Innen- oder Oberflächenrissen. Im Temperaturbereich nahe der Solidustemperatur besitzt Stahl eine nur geringe Duktilität (Duktilitätsminimum I), sodass kleine Spannungen die erstarrte Dendritenstruktur auseinanderreißen können. Es fließt Schmelze in diese Bereiche und es entstehen Risseigerungen bzw. Innenrisse. Wohingegen Oberflächenrisse in der Kokille entstehen, wenn die Reibkraft in der Kokille zu hoch ist und die Ausziehkräfte den Strang auseinanderreißen. Des Weiteren wenn die Kühlung ungleichmäßig ist und die Stranggeometrie verzerrt wird. Aber auch durch mechanische Belastungen im weiteren Prozessverlauf entstehen Oberflächenrisse, da Stahl ein zweites Duktilitätsminimum in einem Temperaturbereich zwischen 800°C und 1200°C erreicht. Des Weiteren führen das wechselnde Temperaturfeld in der Sekundärkühlzone und die mechanische Belastung durch Kokillenreibung und -haftung, Stütz- und Zugrollen, sowie Ausbauchung und Richten zu alternierenden Dehnungen, die den Stahl zusätzlich verspröden. Die Versprödung wird nur durch verformungsinduzierte Ausscheidungen verursacht. Letztendlich hängt die Entstehung der Risse also nicht nur von den Gießparametern und der thermo-mechanischen Lastgeschichte ab, sondern auch von der Rissempfindlichkeit eines Stahls selbst.

Der thermo-mechanische Zustand der erstarrenden Strangschale wird nicht nur durch die äußeren Randbedingungen, sondern auch durch den im Inneren flüssigbleibenden Stahl beeinflusst. Die flüssige Phase existiert über einen sehr großen Bereich. Im flüssigen Stahl wirkt der hydrostatische Druck, der mit zunehmendem Abstand zum Meniskus größer wird. Der Druck lastet auf der Strangschale und verformt diese, je nachdem wie weich und dick sie ist. So kann es beispielsweise zwischen den Rollen in der Sekundärkühlzone zu Ausbaucheffekten kommen. Auch das Strömungsfeld in der Kokille hat einen Einfluss auf die Schalenbildung, da es die Temperaturverteilung prägt und somit auch den Abbau der Überhitzung. Zu starke Strömungen verteilen die beim Erstarren entstehende latente Wärme wieder in der Stahlschmelze oder tragen Dendriten von der Strangschale ab.

Kapitel 3

Aufgaben- und Problemstellung

3.1 Stand des Wissens

Die Berechnung des Spannungszustandes beim Stranggießprozess erfolgt mit kontinuumsmechanischen Modellen, welche die Wahl eines geeigneten numerischen Diskretisierungsverfahrens erforderlich machen. Die größte Anzahl der mechanischen Modelle zur Berechnung des Spannungszustandes während des Stranggießprozesses sind mit der Finiten Elemente Methode (FEM) umgesetzt worden. Wenige thermo-mechanische Modelle basieren auf der Finiten Differenzen Methode (FDM), wie bei Hattel et al. [PH97] oder der Finiten Volumen Methode (FVM), wie bei Tayler et al. [TBC95] oder Lee et al. [LYO⁺00]. Die mechanischen FEM-Modelle sind in der Regel zweidimensional, da diese den Rechenaufwand gegenüber dreidimensionalen Modellen und die Anzahl der zu bestimmenden Größen der Bilanzgleichungen reduzieren.

Rotationssymmetrische, stationäre Längsmodelle sind zum Beispiel von Kelly et al. [KMO⁺88] und Fachinotti et al. [HCF00], [FC07], Abbildung (3.1), zur Simulation der Spaltbildung zwischen Strang und Kokille benutzt worden. Diese Modelle haben den Vorteil, dass die Lage der Erstarrungsfront während der gesamten Rechnung bekannt ist. Sie haben aber den Nachteil, dass die thermo-mechanische Lastgeschichte vom Zeitpunkt der Erstarrung an für einen diskreten Materialpunkt nicht bekannt ist. Für den Ausgangszustand der Rechnung ist also eine zusätzliche Annahme zu treffen. Daraufhin ist ein vom Gießspiegel (Bereich mit 100% flüssiger Phase) aus in die Gießanlage hineinwachsendes Modell von Bellet und Heinrich [BH04] entwickelt worden. Für dieses zweidimensionale globale instationäre Längsmodell ist keine Zuordnung der thermo-mechanischen Lastgeschichte mehr erforderlich.

Bei den zweidimensionalen Querschnittsmodellen ist es im Gegensatz zu den Längsmodellen so, dass der diskrete Materialpunkt die thermo-mechanische Lastgeschichte vom Zeitpunkt der Erstarrung an vollständig erfährt. Die Querschnittsmodelle sind aber für die Auswertung von Spannungen in Längsrichtung auf Grund ihrer Dimensionalität eingeschränkt. Diese sind von vielen Autoren wie Brimacombe et al. [GBW76], [SB77], Thomas et al. [LT04], [MTS91], [MT93], [LT02], Abbildung (3.2), Huespe et al. [RHC03], Yoon et al. [HLY⁺99], Saraswat und Mills [SMLM07], Ohnaka und Yashima [OY88], Tzeng und Kobayashi [TK89], Boehmer [RGMN98], Lewis et al. [LMR84], Kristiansson [Kri84] sowie Steinert [Ste99] benutzt worden, um den Spannungszustand in der Strangschale oder den Wärmeübergang zwischen Strangschale und Kokille unter Berücksichtigung von Spaltbildung und Gießpulverfilmdicke zu berechnen.

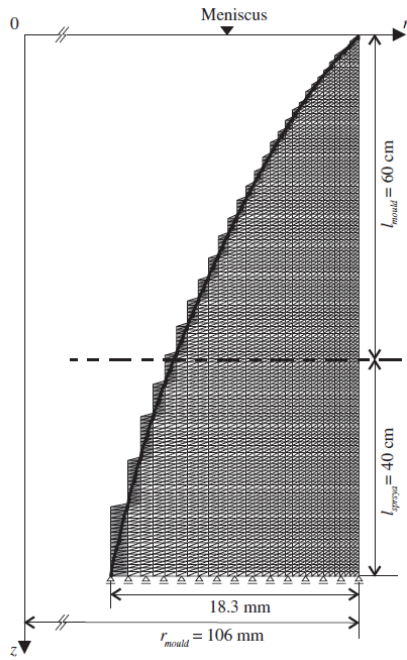


Abbildung 3.1: Zweidimensionales Längsmodell, aus Fachinotti [FC07]

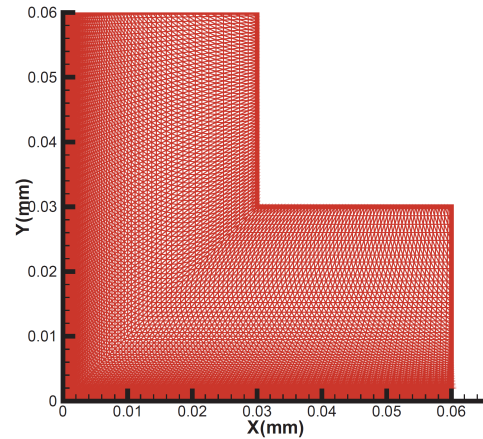


Abbildung 3.2: Zweidimensionales Querschnittsmodell in L-Form aus, Thomas [LT02]

Numerisch werden die FEM-Modelle mit einem impliziten Lösungsverfahren in der Lagrangeschen Betrachtungsweise berechnet. Hibbeler [Hib09] und Hibbeler et al. [KHT09] bilden da eine Ausnahme, da sie erstmals ein explizites Lösungsverfahren zur Berechnung des Spannungszustands in der Strangschale anwenden. Eine weitere Ausnahme stellen die Modelle von Fachinotti et al. [HCF00], [FC07] und Huespe et al. [RHC03] dar, die anstelle der reinen Lagrangeschen Betrachtungsweise eine Kombination aus Lagrangescher (für die feste Phase) und Eulerischer Betrachtungsweise (für die flüssige bzw. fest-flüssige Phase) wählen, die sogenannte ALE-Methode (arbitrary Lagrange-Euler). Diese Methode wird auch von Bellet et al. [BJP04] zur Simulation eines Speisers beim Vergießen eines Blocks genutzt. Thomas und Bellet diskutieren in [BT07] die Unterschiede beider Methoden zur Spannungsrechnung bei Erstarrungsvorgängen.

In allen FEM- (Lagrange-) Längs- und Querschnittsmodellen kann neben der festen Phase zusätzlich noch die flüssige Phase Teil des Bilanzraums der Spannungsrechnung sein. In diesem Fall sind alle Phasen als ein einziges Kontinuum modelliert und müssen mit der Kontinuumsmechanik beschrieben werden. Durch die Erweiterung des Rechengebiets auf den flüssigen Teil muss aber sichergestellt werden, dass das Verschiebungsfeld des festen Teils nicht beeinflusst wird. Für die flüssige Phase gelten dann entweder eigene konstitutive Materialgesetze oder es werden weitere Bedingungen an die Elementformulierungen gestellt. Ein Aktivieren von passiven Elementen bei Erreichen der Liquidustemperatur ist zwar möglich, wie es zum Beispiel Fjaer und Mo [GM90] anwenden, führt aber zu Rechenzeitverlusten. Kristiansson [Kri82], [Kri84] gibt den Elementen in der Schmelze Nullfestigkeit und setzt gleichzeitig die Verschiebungen gleich Null. Eine Methode, die auch Huespe et al. [RHC03] anwenden. Fachinotti et al. [HCF00] setzen den Elastizitätsmodul sogar gleich Null. Das hätte in den Gleichungen aber eine Division durch Null zur Folge, sodass ihr Programm die betroffenen Gleichungen gesondert behandeln muss.

Konstitutive Materialgesetze finden in einfachen Materialmodellen Anwendung, indem sie aus der flüssigen Phase einen elastischen Körper mit kleinem Elastizitätsmodul machen, wie Steinert [Ste99]. Ebenso Tseng und Kobayashi [TK89], deren Elastizitätsmodul nahe Null ist. Zusätzlich setzen sie die Querkontraktionszahl nahezu gleich $1/2$, um die Inkompressibilität der Flüssigkeit zu simulieren. Williams et al. [WLM79] rechnen mit einem Elastizitätsmodul und einer Fließspannung, die bei Solidustemperatur gegen Null geht. Saraswat et al. [SMLM07] erweitern das elastische Materialmodell auf ein elastisch-plastisches mit niedrigem Elastizitätsmodul und extrem hoher Fließspannung, um plastische Verformung im Flüssigen auszuschließen. Andere Modelle senken den Elastizitätsmodul ab und definieren ein eigenes Fließgesetz für die flüssige Phase, wie Thomas und Li [CT05] oder Thomas et al. [BR02]. Um numerische Instabilitäten zu vermeiden, definieren sie aber eine Fließspannung von $0,01 \text{ MN m}^{-2}$. Das Materialgesetz von Bellet et al. [BJP04], [BH04] schließt einen elastischen Anteil komplett aus. Es gilt ein rein viskoses Materialgesetz mit thermischen Anteilen.

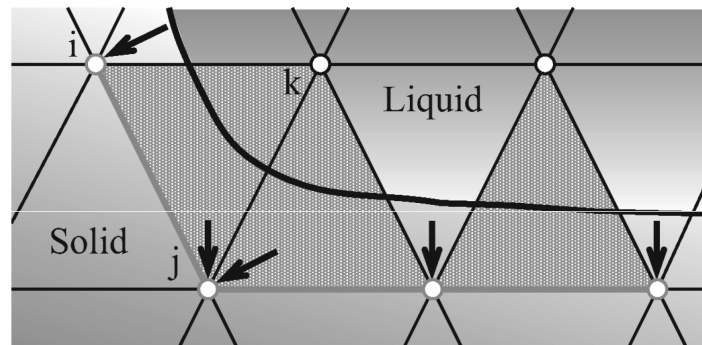


Abbildung 3.3: Druck auf Erstarrungsfront, aus Li et al. [CT05]

Den flüssigen Teil des Bilanzraums spannungsfrei zu modellieren verhindert jedoch, dass der hydrostatische Druck entlang der Erstarrungsfront auf die erstarrende Schale wirkt. Es gibt in den Modellen unterschiedliche Ansätze, um den Druck zu berücksichtigen. Yoon et al. [HLY⁺99] und Kristiansson [Kri84] können die Steifigkeitsmatrix und die Verschiebungen der Elemente bestimmen und so eine konstante Spannung kontrollieren. Wegen ihrer unterschiedlichen Materialmodelle für die einzelnen Stahlphasen (flüssig, flüssig-fest und fest), unterteilen Bellet et al. [BJP04], [BH04] die Impulsbilanz in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil. Es ergibt sich für sie der Vorteil den Druckzustand in der flüssigen Phase im Wesentlichen durch den volumetrischen Spannungsanteil beschreiben zu können. Bei Huespe et al. [HCF00] und Thomas et al. [CT05], Abbildung (3.3), [MT93], [MTS91] gilt eine zusätzliche innere Randbedingung, bei der eine dem hydrostatischen Druck entsprechende Kraft an den Knotenpunkten entlang der Erstarrungsfront wirkt. Abwandlungen der zweiten Methode finden sich bei Saraswat und Mills [SMLM07], sowie bei Steinert [Ste99]. Saraswat und Mills [SMLM07] bringen Flächenlasten auf alle Elementkanten der flüssigen Phase auf, sodass effektiv ein Druck auf die Erstarrungsfront wirkt. Steinert [Ste99] macht das Analoge für die feste Phase. Pragmatisch gehen Hibbeler et al. [KHT09] vor, da sie den hydrostatischen Druck als äußere Randbedingung definieren. Sie halten den Einfluss des Drucks auf den Spannungszustand direkt an der Erstarrungsfront für vernachlässigbar, jedoch nicht dessen Wirkung auf die Spaltbildung.

Problemlos ist die Modellierung des Drucks für Modelle, bei denen der Verlauf der Erstarrungsfront bekannt ist und keine flüssige Phase mit bilanziert werden muss. Das ist zum Beispiel bei den stationären Längsmodellen von Kelly et al. [KMO⁺88] oder Fachinotti et al. [FC07] oder dem zweidimensionalen Querschnittsmodell von Grill et al. [GBW76] der Fall. Der Druck wird bei diesen Modellen in Abhängigkeit der Höhe als Randbedingung entlang der Erstarrungsfront definiert. Andere Modelle, die nicht mit großen oder kommerziellen Software-Paketen umgesetzt worden sind, wie das von Jablonka [Jab95] (zweidimensionales FEM-Längsmodell), Schwerdtfeger et al. [SST98] oder Harste [Har89] (beide rotationssymmetrischer verallgemeinerter ebener Dehnungszustand), schließen ebenfalls die flüssige Phase bei der Berechnung des Spannungszustands aus. Auch hier ist der hydrostatische Druck als Randbedingung an der Erstarrungsfront definiert.

3.2 Aufgabenstellung

Den fest-flüssigen Bilanzraum adäquat mit der Strukturmechanik zu modellieren, ist nur mit vereinfachenden Annahmen und weiteren Randbedingungen für die flüssige Phase möglich. Soll der flüssige Teil spannungs- und verschiebungsfrei sein, steht er im Konflikt mit der Forderung, dass der hydrostatische Druckzustand gelten muss. Ist die flüssige Phase sehr weich und mit niedrigen Viskositäten modelliert, besteht die Gefahr, dass große Kriechdehnungen den Bereich übermäßig verzerren. Ein Lösungsansatz dieses Problems besteht in der Entkopplung von Druck und Verschiebungsfeld. Die konstitutiven Materialgesetze der Strukturmeechanik bilden immer eine Relation zwischen Spannung und Dehnung bzw. Dehnungsrate. Mit einer Entkopplung des Drucks von der dehnungsabhängigen Spannungsrechnung, kann ein Druckzustand ohne Verschiebungsfeld erzeugt werden und somit ohne weitere Bedingungen der hydrostatische Druck der flüssigen Phase.

Ein zweites Problem der FEM-Stranggießmodelle ist die massentreue Berechnung des thermomechanischen Zustands. Die Spannungsrechnung basiert bei diesen auf den Gleichungen der Strukturmechanik, bei der die Dehnungen in mechanische und thermische Anteile aufgeteilt werden. Durch das Lösen der Impulsbilanz resultieren mechanische Dehnungen, deren Größe durch die Materialgesetze bestimmt ist. Diese werden mit den thermisch verursachten Dehnungen additiv ergänzt. Da bei dieser Methode keine Masse bilanziert wird, stellt sie genau genommen nur eine Näherungslösung für das Verschiebungsfeld dar. Diese Modellierungsart liefert gute Ergebnisse für feste Körper mit eher zähem Fließverhalten und geringen Dichteänderungen. Im Hochtemperaturbereich verhält sich Stahl jedoch genau entgegengesetzt, was zu einer Ungenauigkeit in der Massenbilanz führt.

Es ist daher das Ziel dieser Arbeit einen neuen Ansatz zu entwickeln, der das Verschiebungsfeld massenkonsistent ausrechnet und einen kontinuierlichen Übergang von flüssiger zu fester Phase ermöglicht. Basis des neuen Ansatzes soll dabei die Berechnung des Drucks im gesamten Bilanzraum sein. Als Lösungsstrategie wird dafür das Druckkorrekturverfahren ausgewählt, dass aus der Strömungsmechanik unter anderen durch den SIMPLE-Algorithmus von Patankar und Spalding [Spa82] bekannt ist. Das Druckkorrekturverfahren ist zwar schon von Barber et al. [BT96] zur Berechnung des Spannungszustand bei Ausbaueffekten verwendet worden, jedoch nur für den Bereich der festen Phase. Da der Druck bekannt ist, muss die Impulsbilanz wie bei Bellet et al. [BH04] in einen deviatorischen und volumetrischen Anteil aufgeteilt werden.

Kapitel 4

Grundlagen des struktur- und hydromechanischen Spannungsmodells

Das Kapitel vergleicht die wesentlichen Aspekte des struktur- und hydromechanischen Spannungsmodells miteinander. Für beide Modelle werden dabei die wesentlichen Gleichungen dargestellt, sodass die Unterschiede zwischen diesen deutlich werden. Die Herleitung der theoretischen Grundlagen der Strukturmechanik sind nicht Thema dieser Arbeit, sodass nur die resultierenden Gleichungen wiedergegeben werden. An dieser Stelle sei auf die jeweiligen Lehrbücher der einzelnen Fachgebiete verwiesen, deren Inhalte hier auch wiedergegeben werden. Die Grundlagen der Strukturmechanik sind zum Beispiel bei Greve [Gre03] oder Parisch [Par03] nachzulesen, die des Druckkorrekturverfahrens in dem Buch von Ferziger und Peric [FP08].

4.1 Idee der kontinuumsmechanischen Modellierung

Substanzen, seien es Festkörper oder Flüssigkeiten, werden durch äußere Einwirkungen, also durch Kräfte oder Temperaturänderungen, verformt. Das Verformungsverhalten der Substanz kann mit Hilfe eines Kontinuums modelliert werden. Der mikrostrukturelle und atomare Aufbau der Substanz bleibt dabei vollständig unberücksichtigt, sodass nur dessen phänomenologisches Verhalten mit dem Kontinuum beschrieben wird. In dem strukturlosen Kontinuum existieren materielle Punkte, denen spezifische Größen, wie Dichten oder Geschwindigkeiten, zugeordnet werden.

Das Ziel der kontinuumsmechanischen Modellierung ist es, die Verformung des Kontinuums zu berechnen. Die dafür notwendigen Gleichungen unterteilen sich in kinematische Beziehungen, Bilanzgleichungen und konstitutive Beziehungen, wobei die letzteren materialabhängig sind. Mit den Relationen der physikalischen Größen zueinander und geeigneten Randbedingungen lassen sich die Verformungen schließlich berechnen. Das mit allen Gleichungen erstellte Randwertproblem besteht aus einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, das in der Regel nur numerisch zu lösen ist.

Die Modellierung von Festkörpern und Flüssigkeiten unterliegt zwei verschiedenen Modellierungsansätzen. Generell gilt, dass die Bewegung eines Körpers als zeitliche Abfolge von Konfigurationen angesehen werden kann. Die aktuelle Konfiguration wird dabei als Momentankonfiguration und die ursprüngliche als Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration bezeichnet. In der Ausgangskonfiguration werden die Identitäten der einzelnen materiellen Punkte definiert. Die

Entwicklung von Verschiebungen und Spannungen kann auf diesen Ausgangszustand bezogen werden, sodass sich eine materielle (Lagrangesche) Betrachtungsweise ergibt. Diese eignet sich sehr gut zur Berechnung von Festkörpern, da die Bewegungen der einzelnen materiellen Punkte verfolgt werden kann. Für Flüssigkeiten dagegen ist die Verfolgung einzelner materieller Punkte viel zu aufwendig. Daher sind die physikalischen Größen räumlichen Punkten von sogenannten Kontrollvolumina zugeordnet, was zu einer räumlichen (Eulerschen) Betrachtungsweise führt. In dieser Betrachtungsweise existiert keine Ausgangskonfiguration, sodass die Größen auf den Momentanzustand bezogen werden.

4.2 Wärmespannungsproblem der Festkörpermechanik

Die Spannungsrechnung bei Stranggießmodellen basiert im wesentlichen auf dem Lösen der Impulsbilanz, zu deren Lösung konstitutive Materialgesetze erforderlich sind, die einen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung herstellen. Des Weiteren sind kinematische Beziehungen erforderlich, die einen Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Dehnungen beschreiben. Findet eine nichtisotherme Zustandsänderung statt, so ist zusätzlich eine thermische Dehnung erforderlich, welche die thermische bedingte Verformung beschreibt.

4.2.1 Impulsbilanz und Randbedingungen

Der Spannungszustand eines Körpers ist bestimmt durch das Kräftegleichgewicht, welches im Sinne der Mechanik der Zustand eines Körpers ist, in dem sich alle resultierenden Kräfte gegenseitig aufheben, die Summe aller wirkenden Kräfte also gleich null ist. Unter Vernachlässigung der Trägheitskräfte gilt für die lokale Gleichgewichtsbedingung:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (4.1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$: Spannungstensor
 ∇ : Nabla Operator, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

Das Kräftegleichgewicht gilt für ein Gebiet mit dem Rand Ω . Die für Bilanzgleichung geltenden Randbedingungen können sein, [KT06]:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Omega_u \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Phi} \quad \text{auf } \Omega_\Phi \quad (4.3)$$

\mathbf{u} : Verschiebungsvektor
 $\hat{\mathbf{u}}$: vordefinierter Verschiebungsvektor
 \mathbf{n} : Normalenvektor
 $\boldsymbol{\Phi}$: Oberflächenspannung
 Ω : Rand

4.2.2 Kinematische Beziehung

Für Wärmespannungsrechnungen bei Erstarrungsproblemen kann davon ausgegangen werden, dass die auftretenden thermischen und mechanischen Dehnungen nur wenige Prozent groß sind. Die Verformung der erstarrenden Strangschale, auch im Bereich des Erstarrungsintervalls, ist ebenfalls klein. Aus diesem Grund kann nach der Theorie der kleinen Deformationen gerechnet

werden. Den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Dehnungen stellt der Verzerrungstensor her. Für den Fall, dass nur kleine Deformationen im Material auftreten, können die Terme zweiter Ordnung des Verzerrungstensor vernachlässigt werden. Es resultiert der lineare Dehnungstensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^t + (\nabla \mathbf{u}^t)^t \right) \quad (4.4)$$

4.2.3 Konstitutive Materialgesetze

Phänomenologisch lässt sich für Stahl die Dehnung in elastische $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ und inelastische $\boldsymbol{\varepsilon}^{ie}$ Dehnungen aufteilen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{ie} \quad (4.5)$$

4.2.3.1 Elastische Dehnungen

Die elastischen Dehnungen können linear mit dem verallgemeinerten Hookeschen Modell ausgedrückt werden können. Des Weiteren kann für Stahl isotropes Materialverhalten angenommen werden. In kartesischen Koordinaten ergibt sich für das verallgemeinerte Hookesche Modell:

$$\varepsilon_{ij}^{el} = \frac{1}{E} \left((1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk}) \delta_{ij} \right) \quad (4.6)$$

ε_{ij}^{el}	:	elastische Dehnungsmatrix	σ_{ij}	:	Spannungsmatrix	$[\text{N m}^{-2}]$
E	:	Elastizitätsmodul	σ_{kk}	:	Spur der Matrix	$[\text{N m}^{-2}]$
ν	:	Querkontraktionszahl	δ	:	Kroneckersymbol	

In diesem Gesetz sind der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl die Proportionalitätskonstanten zwischen Spannung und Dehnung. Die Querkontraktionszahl ν gibt das Verhältnis von Dicken- zu Längenänderung bei Verformung wieder. Das kompressible Verhalten eines Materials wird mit Hilfe des Kompressionsmoduls wiedergegeben, der sich mit dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktion bestimmen lässt. Die Querkontraktion wird in den Spannungsmodellen sehr unterschiedlich benutzt, meistens ist sie konstant, wie bei Saraswat und Mills [SMLM07] mit 0,3 und bei Steinert [Ste99] mit 0,37.

4.2.3.2 Inelastische Dehnungen

Die inelastischen Dehnungen geben die plastische und viskose Verformung wieder. Das sehr viskose Verhalten des Stahls bei hohen Temperaturen ist in vielen Versuchen gemessen, beispielsweise von Suzuki et al. [STWS88] und Wray [Wra76], und als Materialgesetz formuliert worden, Kozlowski [KTAW92], Schwerdtfeger et al. [HSS92], [HS96]. Die Kriechgesetze hängen von verschiedenen Größen wie der Vergleichsspannung, der plastischen Vergleichsdehnung selber, der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung des Stahls ab. Sie gelten für einachsige Belastungen und werden daher der Vergleichsdehnrate gleichgesetzt.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, T, \%C) \quad (4.7)$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}$:	Vergleichsdehnrate	$[\text{s}^{-1}]$
$\bar{\sigma}$:	Vergleichsspannung	$[\text{N m}^{-2}]$
T	:	Temperatur	$[\text{K}]$
$\%C$:	Synonym für chemische Zusammensetzung	

Aus dem linearen und symmetrischen Dehnungstensor, Gleichung (4.4), lässt sich die Vergleichsdehnung $\bar{\varepsilon}$ nach von Mises ausrechnen, welche eine skalare Beschreibung des dreidimensionalen Dehnungszustands darstellt.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I'_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} \quad (4.8)$$

In die Berechnung geht die zweite Invariante I'_2 des Dehnungsdeviators ein. Invarianten sind aus dem Tensor gebildete Skalare, welche sich bei einer Koordinatentransformation nicht ändern. Der Deviator beschreibt die Abweichung vom hydrostatischen Zustand, der wiederum einer von allen Seiten gleichen Änderung entspricht. Bei der Spannung entspricht der hydrostatische Anteil, auch Kugeltensor genannt, beispielsweise dem Druck. So gilt für die Spannung:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (4.9)$$

σ_{kk} : Spur der Spannungsmatrix [N m⁻²]
 σ'_{ij} : Spannungsdeviator [N m⁻²]

Genauso wie es eine Vergleichsdehnung gibt, so existiert auch eine Vergleichsspannung $\bar{\sigma}$ nach von Mises, die sich in analoger Weise berechnen lässt.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 I'_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (4.10)$$

Der Deviator für ein isotropes Material kann mit folgendem Ausdruck dargestellt werden, wobei G der Schubmodul ist:

$$\sigma'_{ij} = 2G \varepsilon'_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon'_{ij} \quad (4.11)$$

Es wird angenommen, dass die inelastischen Dehnung wesentlich größer sind als die elastischen und es wird vorausgesetzt, dass die inelastischen Dehnungen inkompressibel sind, womit sich $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^{ie}$ ergibt. Mit der geforderten Inkompressibilität des Materials ($\nu = 0,5$) und der eindimensionalen Forderung

$$\bar{\sigma} = E \bar{\varepsilon} \quad (4.12)$$

ergibt sich ein Ausdruck zur Beschreibung der inelastischen Dehnungen, der unter anderem von der Vergleichsdehnung abhängt. Diese Formel, auch in zeitabgeleiteter Form, findet sich häufig zur Beschreibung der inelastischen Dehnungen bei Metallen, Dunne und Petrinic [DP05], sowie in den Spannungsmodellen für den Strangguss, Thomas und Koric [KT06].

$$\varepsilon_{ij}^{ie} = \frac{3}{2} \dot{\bar{\varepsilon}} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (4.13)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ie}$: inelastische Dehnungsrate [s⁻¹]

4.2.4 Thermische Dehnung

Zu den mechanischen Dehnungen, Summe aus elastischer und inelastischer Dehnung, wird bei nichtisothermen Vorgängen die thermische Dehnung ϵ^{th} additiv hinzugefügt.

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{ie} + \epsilon^{th} \quad (4.14)$$

Die thermische Dehnung resultiert aus der thermisch bedingten Volumenänderung des Materials, **Anhang D.4**. Aus der Volumendehnung einer thermischen Zustandsänderung folgt bei angenommener Massenkonzanz und Isotropie ein Ausdruck für die thermische Dehnung.

$$\epsilon_{ij}^{th} = \left(\sqrt[3]{\frac{\rho_{T_{Ref}}}{\rho_T}} - 1 \right) \delta_{ij} \quad (4.15)$$

ϵ^{th}	: thermische Dehnung	
T_{Ref}	: Temperatur im Referenzzustand	[K]
T	: Temperatur in der aktuellen Konfiguration	[K]
ρ	: Dichte	[kg m ⁻³]

4.3 Spannungsproblem in hydro-mechanischer Formulierung

Der hydro-mechanische Ansatz zur Lösung des Wärmespannungsproblems hat das Ziel die Impuls- und Massenbilanz miteinander zu koppeln, daher sind bei diesem Ansatz beide Bilanzgleichungen zu erfüllen. Darüber hinaus gelten auch für den hydro-mechanischen Ansatz kinematische Beziehung und konstitutive Materialgesetze. Das hydro-mechanische Modell fordert, dass der thermodynamische Zustand des Materials richtig wiedergegeben wird, was durch vorgegebene Dichte (thermodynamische Dichte) realisiert wird.

4.3.1 Massen- und Impulsbilanz

Die Masse ist eine Erhaltungsgröße und wird bei Kontinua weder erzeugt noch vernichtet. Aus der Transportbilanz eines Kontrollvolumens lässt sich für die Betrachtung beliebig kleiner Volumina die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form ableiten.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.16)$$

ρ	: Dichte	[kg m ⁻³]
t	: Zeit	[s]
\mathbf{v}	: Geschwindigkeitsvektor	[m s ⁻¹]

Auch für den neuen methodischen Ansatz gilt die lokale Gleichgewichtsbedingung unter Vernachlässigung der Trägheits- und Volumenkräfte, Gleichung (4.1).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

Aus der additiven Zerlegung des Spannungstensors in einen Schubspannungstensor und einen Drucktensor

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}) = 0 \quad (4.17)$$

mit

$$\mathbf{P} = -P \mathbf{I} \quad (4.18)$$

$\boldsymbol{\tau}$: Schubspannungstensor	$[\text{N m}^{-2}]$
\mathbf{P}	: Drucktensor	$[\text{N m}^{-2}]$

kann der Druck als Freiheitsgrad für die thermodynamische Kompatibilität definiert werden. Eine entsprechende Bestimmungsgleichung ist dann die Kontinuitätsgleichung. Die Idee hinter dem Ansatz ist, dass sich der Druck so einstellt, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Dieser Druck-Geschwindigkeits-Ansatz ist aus der Strömungsmechanik bekannt. Die Methoden zur Berechnung des Drucks in der Strömungsmechanik sind beispielsweise bei Ferziger und Perić [FP08] ausführlich beschrieben.

4.3.2 Kinematische Beziehung des hydro-mechanisches Modells

In analoger Weise zum Wärmespannungsproblem der Strukturmechanik müssen für die Impulsbilanz konstitutive Materialgesetze und kinematische Beziehungen gelten. Anstelle des Dehnungstensors wird für die kinematische Beziehung hier Dehnratentensor definiert, der sich aus den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten ergibt.¹

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v}^t + (\nabla \mathbf{v}^t)^t \right) \quad (4.19)$$

Die Zielgröße der Impulsbilanz wird dadurch die Geschwindigkeit, wohingegen es in der Strukturmechanik die Verschiebung ist. Der Geschwindigkeitsvektor aus der Lösung der Impulsbilanz ist aber nicht notwendigerweise gleich dem Geschwindigkeitsvektor aus der Massenbilanz, da die beiden Gleichungen unabhängig voneinander gelöst werden. Erst durch die Druckkorrektur wird die Geschwindigkeit, welche in beiden Bilanzgleichungen vorkommt, so eingestellt, dass beide Bilanzgleichungen erfüllt sind.

4.3.3 Konstitutive Materialgesetze

Das konstitutive Materialgesetz des hydro-mechanischen Modells erfordert eine deviatorische Formulierung. Die deviatorische Formulierung lässt sich anhand eines einfachen Bildes veranschaulichen, Abbildung (4.1). Am Beispiel eines Würfels verdeutlicht, bewirkt eine Volumenänderung, dass der Würfel seine Form behält und nur seine Größe ändert. Eine Gestaltänderung dagegen verzerrt seine Form. Basierend auf dieser Vorstellung lässt sich der Druck als die volumenändernde Spannung, da er von allen Seiten gleichmäßig auf den Würfel wirkt, und die Schubspannung als deviatorische (gestaltändernde) Spannung interpretieren.

Das konstitutive Materialgesetz des hydro-mechanischen Modells unterscheidet sich in zwei Punkten von dem des strukturmechanischen. Zum einen ist es deviatorisch formuliert, da der Druck als volumenändernder Spannungsanteil über die Kontinuitätsgleichung bestimmt ist, und

¹Es hat sich im Nachhinein herausgestellt, dass anstatt des Dehnratentensors hier eigentlich die räumliche Verzerrungsgeschwindigkeit D stehen müsste, die sich aus dem symmetrischen Teil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten ergibt. Da $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ in dem Modell aber stets aus den Geschwindigkeiten berechnet wird und sich nicht aus der zeitabgeleiteten Dehnung, tritt keine Inkonsistenz im Modell auf.

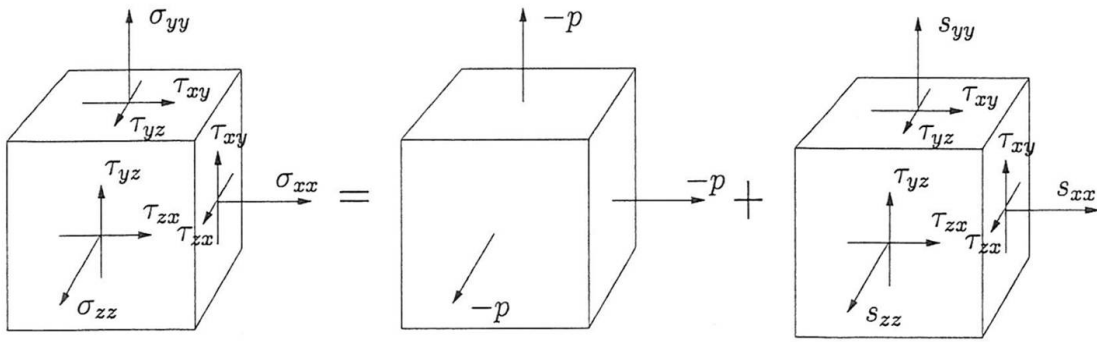


Abbildung 4.1: Additive Aufteilung der Spannung am Beispiel eines Würfels, [Har09]

zum anderen gilt eine geschwindigkeitsabhängige Formulierung. Es muss wegen der deviatorischen Formulierung, auch für die Dehnraten die Unterscheidung zwischen volumetrischen und deviatorischen Anteilen getroffen werden:

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^v \quad (4.20)$$

$$\dot{\epsilon}^d = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v}^t + (\nabla \mathbf{v}^t)^t \right) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (4.21)$$

$\dot{\epsilon}^v$: volumetrischer Dehnraten Tensor

$\dot{\epsilon}^d$: deviatorischer Dehnraten Tensor

Auch hier gilt für Stahl die additive Zerlegung in einen elastischen und einen inelastischen Anteil. Diese muss aber gegenüber Gleichung (4.5) deviatorisch sein.

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon}^{d,el} + \dot{\epsilon}^{d,ie} \quad (4.22)$$

4.3.3.1 Elastische Verzerrungsgeschwindigkeit

Für die einzelnen Anteile der Verzerrungsgeschwindigkeiten gelten eigene Materialgesetze. Die elastische Verformungsgeschwindigkeit ist direkt proportional zur einwirkenden Belastungsänderung. Das linear elastische Verhalten kann nach dem Hookeschen Gesetz in der zeitabgeleiteten Form ausgedrückt werden.

$$\dot{\epsilon}^{d,el} = \frac{1}{2G} \dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{E^d} \dot{\boldsymbol{\tau}} \quad (4.23)$$

Der Schubmodul G kann in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktion ausgedrückt werden. Dieser soll hier aber wegen der angestrebten Unabhängigkeit von der Querkontraktionszahl nicht irreführend benutzt werden, sodass hier ein deviatorischer Elastizitätsmodul E^d definiert wird. Die Kompressibilität eines Materials wird in der Strukturmechanik im Materialgesetz für elastische Dehnungen mit der Querkontraktion berücksichtigt. Soll das elastische Verhalten unabhängig von der Kompressibilität sein, so muss diese an anderer Stelle Berücksichtigung finden, **Kapitel 4.3.5**.

4.3.3.2 Inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit

Das Materialgesetz für inelastisches Verhalten hängt vom Material und dem zu modellierenden Temperatur- und Spannungsbereich des Prozesses ab. Es bietet sich an, Stahl in der erstarrten Strangschale als viskoses Medium zu modellieren. Allgemein kann Stahl für diesen Bereich

als Newtonsche Flüssigkeit interpretiert werden.

$$\dot{\epsilon}^{d,ie} = \frac{1}{2\mu} \tau \quad (4.24)$$

Die Viskosität kann aus den Kriechgesetzen für sekundäres Kriechen bestimmt werden kann, Gleichung (4.7).

4.3.3.3 Resultierende Differentialgleichung

Mit den Materialgesetzen resultiert eine Differentialgleichung, welche es ermöglicht den Schubspannungstensor aus den Dehnraten bzw. den Geschwindigkeiten auszurechnen.

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon}^{d,el} + \dot{\epsilon}^{d,ie} \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{E^d} \dot{\tau} + \frac{1}{2\mu} \tau \quad (4.26)$$

Die Materialgesetze sind sowohl für die feste Phase als auch für die flüssige Phase gültig. Das macht eine phasenspezifische Unterscheidung der Proportionalitätsvariablen notwendig. Im ersten Ansatz könnte der resultierende Elastizitätsmodul additiv aus den mit dem Volumenanteil der Phase gewichteten Elastizitätsmodulen der Phasen bestimmt werden. Das analoge gilt für die Viskosität.

$$E^d = \sum_I g_I \cdot E_I^d \quad (4.27)$$

$$\mu = \sum_I g_I \cdot \mu_I \quad (4.28)$$

g_I : Volumenanteil einer Phase I

Die alleinige phasenspezifische Formulierung der Proportionalitätsvariablen gibt nicht unbedingt die rheologischen Beziehungen der einzelnen Phasen zueinander richtig wieder. Um eine bessere Annäherung an das phasenspezifische Verhalten des Materials zu erhalten, gerade in Hinsicht auf den heterogenen Bereich mit flüssigen Phasenanteilen, können, wie im **Kapitel 5** beschrieben, rheologische Modelle angewendet werden.

4.3.4 Thermodynamische Dichte

Das hydro-mechanische Spannungsmodell muss auf Grund der Kopplung zwischen Massen- und Impulsbilanz die mechanische Dehnung nicht mit einer thermischen Dehnung additiv ergänzen. Die thermisch verursachten Verschiebungen werden in der Kontinuitätsgleichung implizit berücksichtigt. In der Kontinuitätsgleichung muss aber die richtige Masse bzw. Dichte bilanziert werden. Daher gilt für die Kontinuitätsgleichung eine Konsistenzbedingung, damit der thermodynamische Zustand des Materials richtig beschrieben wird.

$$\rho = \rho^{th} \quad (4.29)$$

ρ	:	bilanzierte (berechnete) Dichte	$[\text{kg m}^{-3}]$
ρ^{th}	:	thermodynamische (vorgegebene) Dichte	$[\text{kg m}^{-3}]$

Die Kontinuitätsgleichung muss so gelöst werden, dass die Dichte ρ , die sich als Lösung der Kontinuitätsgleichung mit dem Geschwindigkeitsfeld aus der Spannungsrechnung ergibt, gleich der vorgegebenen Dichte ρ^{th} ist. Oder anders formuliert, das Geschwindigkeitsfeld muss sich so einstellen, dass diese beiden Dichten gleich sind. Um diese Forderung zu erfüllen, muss eine Dichte als Zielgröße vorgegeben werden. Diese Dichte stammt aus thermodynamischen Datenbanken oder thermodynamischen Modellen und wird daher als thermodynamische Dichte bezeichnet. Die thermodynamische Dichte ist durch die chemische Zusammensetzung, die Temperatur und den Druck bestimmt.

$$\rho^{th}([\%i], T, P) \quad (4.30)$$

Theoretisch betrachtet lässt sich die thermodynamische Dichte für alle Materialien aus der integralen Gibbsschen Energie bestimmen.

$$\frac{\partial G}{\partial P} = V_{mol} \quad (4.31)$$

$$\rho^{th} = \frac{\sum_i x_i \cdot M_i}{V_{mol}} \quad (4.32)$$

G	: integrale Gibbssche Energie	[J mol ⁻¹]
V_{mol}	: molares Volumen	[m ³ mol ⁻¹]
x	: Massenanteil	
M	: molare Masse	[kg mol ⁻¹]

4.3.5 Druckbedingter Dichteeinfluss

Das hydro-mechanische Spannungsmodell sieht entgegen dem Spannungsmodell der Strukturmechanik eine Entkopplung der Kompressibilität vom elastischen Materialgesetz vor. Diese Entkopplung erfordert daher einen neuen Ansatz zur Berücksichtigung des kompressiblen Materialverhaltens.

Die Kompressibilität für thermoelastische Fluide wird hier in einem ersten Ansatz benutzt, um einen Vergleich zwischen hydro-mechanischen und strukturmechanischen Modell für elastisches Materialverhalten machen zu können. Die Kompressibilität ist definiert durch:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (4.33)$$

κ	: Kompressibilität	[N ⁻¹ m ²]
V	: Volumen	[m ³]
P	: Druck	[N m ⁻²]

Die Kompressibilität ist ein Maß dafür, wie sich ein Volumen unter (Druck-) Belastung ändert. Wird das Volumen mit zunehmenden Druck kleiner, verdichtet sich das Material. Es ist daher nahe liegend, die Kompressibilität der thermodynamischen Dichte zuzuordnen, zumal diese nach Definition auch druckabhängig ist. Ein Ausdruck wie sich die Dichte mit zunehmenden Druck ändert existiert nicht und muss hergeleitet werden, **Anhang A.1**. Der resultierende Ausdruck für die druckkorrigierte thermodynamische Dichte ist:

$$\rho^{th} = \rho_0^{th} \cdot e^{\kappa \cdot \Delta P} \quad (4.34)$$

ρ_0^{th}	: thermodynamische Dichte beim Referenzdruck	[kg m ³]
---------------	--	----------------------

Kapitel 5

Mehrphasiges Materialmodell des hydro-mechanischen Spannungsmodells

Das für diese Arbeit ausgewählte Materialmodell ist ein mehrphasiges rheologisches Modell, welches beliebiges Materialverhalten modellieren kann. Es unterscheidet sich in diesen Punkten von dem allgemein formulierten visko-elastischen Materialgesetz des hydro-mechanischen Spannungsmodells, Gleichung (4.26). Eine Übertragung des eindimensionalen Materialmodells auf den dreidimensionalen Spannungszustand ist daher notwendig, wofür Kombinations- und Kopplungsvorschriften angegeben werden müssen.

5.1 Mehrphasiges rheologisches Modell

5.1.1 Grundlagen des Materialmodells

Phänomenologisch kann das Materialverhalten von Stahl mit Hilfe von rheologischen Modellen beschrieben werden. Die einzelnen Grundelemente der rheologischen Modelle repräsentieren dabei unterschiedliche Materialverhalten. So ist beispielsweise eine Feder das typische Element, um elastisches Materialverhalten zu modellieren. Einzelnen Grundelementen können Gleichungen zugeordnet werden, die aus empirischen Zug- oder Kriechversuchen stammen. Diese Kopplung führt dazu, dass rheologische Modelle das Materialverhalten unter einachsiger Belastung wiedergeben und deshalb auch Vergleichsmodelle genannt werden.

Die Idee des hier verwendeten Materialmodells stammt aus der Arbeit von Gomez [Gom03], die in ihrer Arbeit einen Zugversuch mit Hilfe eines mehrphasigen rheologischen Modells gerechnet hat. Die Abbildung (5.1) skizziert das für diesen Versuch verwendete rheologische Modell, das aus einer Parallelschaltung von mehreren Bingham-Hooke-Körpern besteht. Das Bingham-Hooke-Modell beschreibt das Verhalten viskoplastischer Materialien und besteht aus einer Feder (Hookesches Grundelement), einem Reibelement (St.-Venant-Element) und einem Dämpfer (Newtonscher Dämpfungszyylinder). Jeder Bingham-Hooke-Körper repräsentiert dabei eine metallische Phase I (flüssig, δ - oder α -Ferrit und Austenit).

In der Arbeit von Gomez [Gom03] sind die einzelnen Stahlphasen parallel zueinander angeordnet worden. Auch Schwerdtfeger et al. [HS96] modellieren das Materialverhalten phasenspezifisch und geben an, dass eine Parallelschaltung für ein α -Ferrit- und Austenitgefüge das reale Verhalten des Stahls besser wiedergibt. Daher wird in dieser Arbeit im ersten Ansatz davon

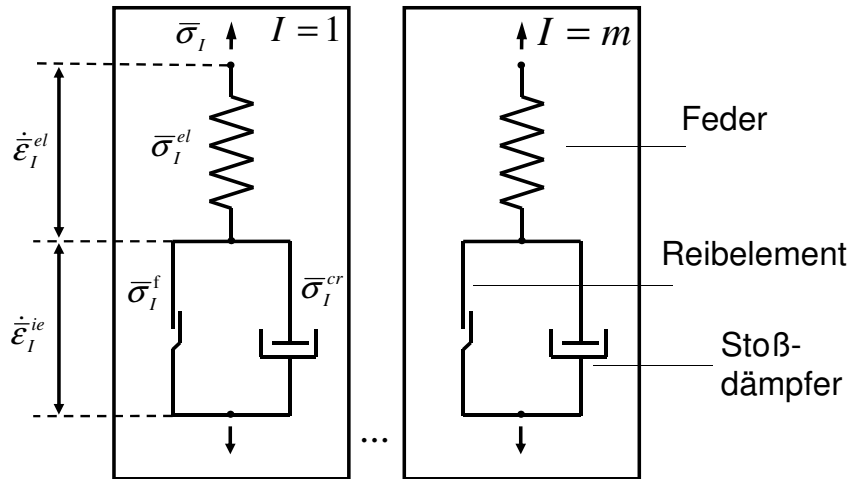


Abbildung 5.1: Mehrphasiges viskoplastisches Modell

ausgegangen, dass die Phasenparallelschaltung das Materialverhalten des Stahls gut wiedergibt.¹

5.1.2 Grundelementgleichungen des Materialmodells

Die **Feder** (Hookesches Grundelement) modelliert die elastischen Verformungsanteile. Die Feder kann zum Beispiel allgemein unter der Voraussetzung der Linearität mit dem Hookeschen Modell in zeitabgeleiteter Form für nichtisotherme Vorgänge beschrieben werden.

$$\dot{\bar{\sigma}}_I = f_{el}(\dot{\bar{\epsilon}}_I^{el}) \quad (5.1)$$

- $\dot{\bar{\sigma}}_I$: Phasenspannung in zeitabgeleiteter Form
- $\dot{\bar{\epsilon}}_I^{el}$: elastische Dehngeschwindigkeit der Phase I
- E_I : Elastizitätsmodul der Phase I

Das **Reibelement** (St.-Venant-Element) modelliert die Plastizität. Eine bleibende Verformung tritt erst nach Erreichen der Fließspannung σ_y ein. Ist die Fließspannung erreicht, verfestigt sich das Material nichtlinear. Die nichtlineare Verfestigung berücksichtigt dabei die plastische Dehnungsgeschichte.

$$\bar{\sigma}_{f,I} = f_f(\bar{\epsilon}_I^f, \bar{\sigma}_I) = \begin{cases} \bar{\sigma}_I & \text{wenn } |\bar{\sigma}_I| < \bar{\sigma}_{y,I} \\ \bar{\sigma}_{y,I} \cdot \text{sign}(\bar{\sigma}_I) & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (5.2)$$

- $\bar{\sigma}_{f,I}$: Spannung des Reibelements der Phase I
- $\bar{\epsilon}_I^f$: plastische Vergleichsdehnung
- $\bar{\sigma}_{y,I}$: Fließspannung der Phase

¹Es hat sich zum Schluss dieser Arbeit herausgestellt, dass die Phasenparallelschaltung den heterogenen Bereich, bestehend aus fester und flüssiger Phase, nicht adäquat beschreibt. Aus den Erstarrungsrechnungen ist hervorgegangen, dass im heterogenen Gebiet die Gefahr besteht, dass sich zu große Spannungen aufbauen. Ein unrealistisches Schrumpfungverhalten ist die Folge. Um einen zu hohen Spannungsaufbau zu vermeiden, ist es möglich, einen zusätzlichen Dämpfer, der nur wirksam ist solange flüssige Phase existiert, in Reihe mit den parallelgeschalteten Phasen zu schalten.

Der **Dämpfer** (Newtonsche Dämpfungszylinder) beschreibt das zeitabhängige, viskose Verformungsverhalten des Materials. Dieses Verhalten kann durch Kriechfunktionen beschrieben werden, die beispielsweise von der Dehnrate oder Spannung abhängen.

$$\bar{\sigma}_{c,I} = f_{c,I}(\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{cr}, \bar{\sigma}_I) \quad (5.3)$$

$\bar{\sigma}_{c,I}$: Spannung des Dämpfers der Phase I
 $\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{cr}$: viskose Dehngeschwindigkeit der Phase

5.1.3 Kombinationsvorschriften des rheologischen Modells

Die mit den Gleichungen beschriebenen Grundelemente repräsentieren einzeln idealisiertes Stoffverhalten, müssen aber für das mehrphasige viskoplastische Materialmodell unter Verwendung von Kombinationsvorschriften miteinander verbunden werden. Die Grundelemente können dabei in Reihe oder parallel zueinander angeordnet werden. Bei einer Reihenschaltung addieren sich die Einzeldehnungen zur Gesamtdehnung, wobei alle Elemente die gleiche Spannung haben:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_j \bar{\varepsilon}^j, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^j \quad (5.4)$$

j : Index eines rheologischen Grundelements

Für die Parallelschaltung gilt der umgekehrte Fall:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^j, \quad \bar{\sigma} = \sum_j \bar{\sigma}^j \quad (5.5)$$

5.1.4 Resultierendes Gleichungssystem des rheologischen Modells

Aus den Grundelementgleichungen und den Kombinationsvorschriften des eindimensionalen Vergleichsmodells lässt sich ein allgemeines nichtlineares Gleichungssystem aufstellen.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\varepsilon}}_I^{el} + \dot{\bar{\varepsilon}}_I^{ie} \quad I = 1, m \quad (5.6)$$

$$\dot{\bar{\sigma}}_I = f_{el}(\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{el}) \quad I = 1, m \quad (5.7)$$

$$\bar{\sigma}_{f,I} = f_f(\bar{\varepsilon}_I^{cr}, \bar{\sigma}_I) \quad I = 1, m \quad (5.8)$$

$$\bar{\sigma}_{c,I} = f_{c,I}(\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{cr}, \bar{\sigma}_I) \quad I = 1, m \quad (5.9)$$

$$\bar{\sigma}_I = \bar{\sigma}_{f,I} + \bar{\sigma}_{c,I} \quad I = 1, m \quad (5.10)$$

$$\sum_I g_I \cdot \bar{\sigma}_I = \bar{\sigma} \quad (5.11)$$

Die Gleichungen (5.6), (5.10) und (5.11), stammen aus den Kombinationsvorschriften für rheologische Modelle. Die Gleichungen (5.7) bis (5.9), sind die jeweiligen Grundelementgleichungen. Für jede Phase des rheologischen Modells existieren fünf Gleichungen mit sechs Unbekannten. In der Gleichung (5.6), ist sowohl die Gesamtdehnungsrate $\dot{\bar{\varepsilon}}$ als auch die elastische Dehnungsrate $\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{el}$ und die inelastische Dehnungsrate $\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{ie}$ unbekannt. In den Gleichungen (5.7) bis (5.9), sind die jeweiligen Elementspannungen unbekannt. In der Gleichung (5.10) werden die einzelnen und schon bekannten Grundelementspannungen zueinander in Relation gesetzt. Es taucht in dieser Gleichung daher keine neue Unbekannte auf. Damit sich ein geschlossenes Gleichungssystem ergibt, ist es notwendig eine sechste Gleichung zu definieren. Die Gleichung (5.11) ist die zusätzlich erforderliche Gleichung, in der die Vergleichsspannung als Eingangsgröße in das System enthalten ist.

5.2 Kopplungsvorschrift zwischen ein- und dreidimensionalem Spannungsmodell

Das einachsig modellierte Materialverhalten muss auf den mehrachsigen Spannungszustand übertragen werden. Die Integration des Werkstoffgesetzes im Rahmen des „Return-Mapping“-Algorithmus, mit einem elastischen Prädiktor- und einem plastischen Korrektorschritt, unter anderen Thomas und Koric [KT06] oder Dunne und Petrinic [DP05], findet in dem hydro-mechanischen Modell keine Anwendung. Aus der Grundidee heraus, dass sich das Material in allen Koordinatenrichtungen gleich und wie das eindimensionale Vergleichsmodell verhält, ist ein eigener Kopplungsalgorithmus entwickelt worden. Mit der Grundidee ist es möglich, beide Spannungszustände über die spezifischen Proportionalitätsvariablen (Elastizitätsmodul und Viskosität) der Materialgesetze zu koppeln. Das macht jedoch eine Angleichung der Materialmodelle und einen iterativen Vorgang für die Kopplung notwendig.

5.2.1 Angleichung zwischen ein- und dreidimensionalem Materialmodell

Das eindimensionale Vergleichsmodell und das dreidimensionale Spannungsmodell werden aneinander angeglichen, indem das eindimensionale Materialmodell in ein effektives visko-elastisches Materialverhalten transformiert und das dreidimensionale Materialmodell mehrphasig formuliert wird.

5.2.1.1 Effektives visko-elastisches Materialmodell

Die Transformation des eindimensionalen elastisch-viskoplastischen in ein effektiv visko-elastisches Materialverhalten ist möglich, da eine Fallunterscheidung fürs Fließens effektiv nicht notwendig ist. Findet Fließen statt, kann dieses mit einer entsprechenden Viskosität ausgedrückt werden. Ist die Fließspannung nicht erreicht, so ist der viskoplastische Verformungsanteil nicht aktiv. Das entspricht einem Verhalten mit extrem hoher Viskosität. Das effektiv visko-elastische Materialmodell bietet darüberhinaus den Vorteil die Grundstruktur des eindimensionalen elastisch-viskoplastischen Materialmodells beizubehalten und so über eine sehr flexible Materialmodellierung zu verfügen. Es ist je nach Anwendungsfall möglich, die benötigten Elemente -Feder, Reibelement, Dämpfer- zu aktivieren oder zu deaktivieren. Die nicht benötigten Elemente bleiben Teil des Systems, dürfen aber keinen Einfluss auf das modellierte Materialverhalten haben.

Es gelten für das effektiv visko-elastische Materialmodell dieselben Materialgesetze, wie für das hydro-mechanische Modell, Vergleich Gleichung (4.23) und (4.24).

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{el} = \frac{1}{E_I^{d, \text{eff}}} \dot{\bar{\sigma}} \quad (5.12)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_I^{cr} = \frac{\bar{\sigma}_I}{2 \mu_I^{\text{eff}}} \quad (5.13)$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}$:	Vergleichsdehnrate	$[\text{s}^{-1}]$
I	:	Indix für Phase	
el	:	Abkürzung für elastisch	
cr	:	Abkürzung für viskos	

eff : Abkürzung für effektiv

5.2.1.2 Mehrphasiges visko-elastisches Materialmodell

Die mehrphasige Formulierung des dreidimensionalen Spannungsmodells erfordert Kombinationsvorschriften, um die einzelnen Phasen miteinander zu verbinden. Es gelten dieselben Kombinationsvorschriften wie für die rheologischen Vergleichsmodelle. Darüber hinaus wird die Schubspannung τ linear aus den Schubspannungen der Einzelphasen τ_I zusammengesetzt und mit dem Volumenanteil der Phase g_I gewichtet. Mit den Materialgesetzen ergibt sich für die Spannungen folgender Zusammenhang:

$$\tau = \sum_I g_I \tau_I \quad (5.14)$$

$$\tau_I = \tau_I^{el} = \tau_I^{cr} \quad (5.15)$$

und für die Dehnraten:

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon}_I^d \quad (5.16)$$

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon}_I^{el,d} + \dot{\epsilon}_I^{cr,d} \quad (5.17)$$

$$\dot{\epsilon}^d = \frac{1}{E_I^d} \dot{\tau}_I^{el} + \frac{1}{2\mu_I} \tau_I^{cr} \quad (5.18)$$

$$\dot{\epsilon}^d = \frac{1}{E_I^d} \dot{\tau}_I + \frac{1}{2\mu_I} \tau_I \quad (5.19)$$

$$\dot{\epsilon}^d = \frac{1}{E_I^{d, \text{eff}}} \dot{\tau}_I + \frac{1}{2\mu_I^{\text{eff}}} \tau_I \quad (5.20)$$

Aus der Gleichung (5.20) muss die Schubspannung einer Phase, τ_I , in Abhängigkeit der Proportionalitätsvariablen, E_I^d und μ_I , der Dehnrates $\dot{\epsilon}^d$ bzw. der Geschwindigkeit, v , sowie der Zeit t bestimmt werden, sodass sich für die Phasenspannung folgende Abhängigkeiten ergeben:

$$\tau_I(E_I^d, \mu_I, \dot{\epsilon}^d(v), t) \quad (5.21)$$

5.2.2 Iterative Kopplungsvorschrift

Der Kopplungsalgorithmus hat zum Ziel, das Kräftegleichgewicht in Abhängigkeit der eindimensionalen Zustandsänderung zu berechnen. In der Abbildung (5.2) ist die Idee der iterativen Kopplungsvorschrift schematisch dargestellt. Ausgangspunkt der Iteration ist die Lösung der Impulsbilanz. Der ausgerechnete dreidimensionale Spannungszustand lässt sich in eine skalare Vergleichsgröße umrechnen. Diese Vergleichsspannung stellt den neuen Spannungszustand des eindimensionalen Vergleichsmodells dar. Aus der numerisch bestimmten Zustandsänderung des eindimensionalen Vergleichsmodells, lassen sich die effektive phasenspezifische Viskosität μ_I^{eff} und der effektive phasenspezifische Elastizitätsmodul E_I^{eff} ausrechnen. Diese beiden Größen werden an das dreidimensionale Spannungsmodell übergeben, sodass die Impulsbilanz erneut gelöst werden kann. Der Vorgang wiederholt sich solange, bis sich keine Änderungen mehr ergeben.

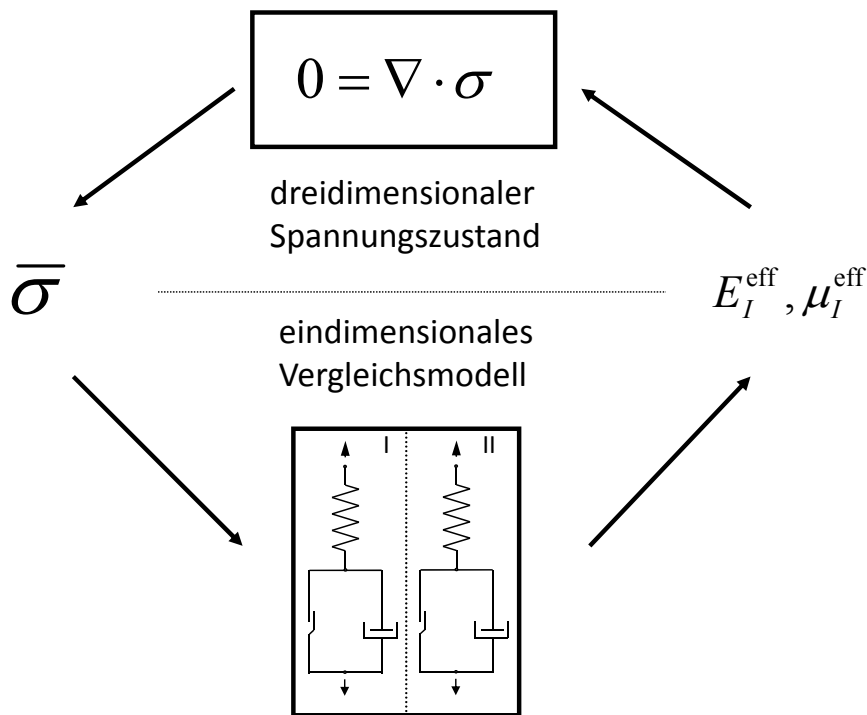


Abbildung 5.2: Kopplung zwischen allgemeinen und einachsigen Spannungsmodell

Die Eingabegröße des eindimensionalen Vergleichsmodells ist die Vergleichsspannung nach von Mises. Die Vergleichsspannung ist ein positives Skalar, womit in dem Vergleichsmodell die Spannungen zwar größer oder kleiner werden können, jedoch nicht in entgegengesetzter Richtung wirken können. Gerade in Hinsicht auf von Zug- auf Druck wechselnde Spannungen, und umgekehrt, die bei Erstarrungsvorgängen auftreten und zu Rissen auf Grund von Verfestigungen führen, ist eine Fallunterscheidung für die Spannungsart erforderlich. Um Druck- und Zugbelastungen im Vergleichsmodell zu unterscheiden, kann der Druck als Indikator für den jeweiligen Belastungsfall definiert werden:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \bar{\sigma} & \text{wenn } \mathbf{P} < 0 \\ -\bar{\sigma} & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (5.22)$$

Kapitel 6

Hydro-mechanisches Beispielproblem

6.1 Grundlagen des vereinfachten geometrischen Modells

Der theoretisch formulierte hydro-mechanische Ansatz zur Berechnung von Spannungen bei Erstarrungsvorgängen, soll an einem vereinfachten geometrischen Problem entwickelt und getestet werden. Als vereinfachtes Problem bietet sich die Simulation des Spannungszustandes in der Mitte eines erstarrenden Rundblocks an, da dadurch die zu berechnende Geometrie eindimensional wird. Diese vereinfachte Geometrie bietet trotzdem die Möglichkeit, die errechneten Ergebnisse mit Literaturdaten zu vergleichen. So zielt das Modell von Harste [Har89] genau auf diese Simulation ab. Das eindimensionale Modell lässt sich prinzipiell auch zur Stranggießsimulation für Rundformate nutzen, wie es Schwerdtfeger et al. [SST98] machen. Oder zum Vergleich mit stationären Längsmodellen, wie dem von Huespe et al. [RHC03].

Das resultierende Spannungsproblem betrachtet einen erstarrenden Rundblock mit einem Radius von 70 mm, Abbildung (6.1). Der Block ist in endlich viele Querschnittsscheiben aufgeteilt, die alle parallel zueinander liegen. Auf Grund des Höhen- zu Dickenverhältnisses des Blockes, kann die Annahme getroffen werden, dass die mittlere Scheibe den Spannungszustand des Blocks darstellt.

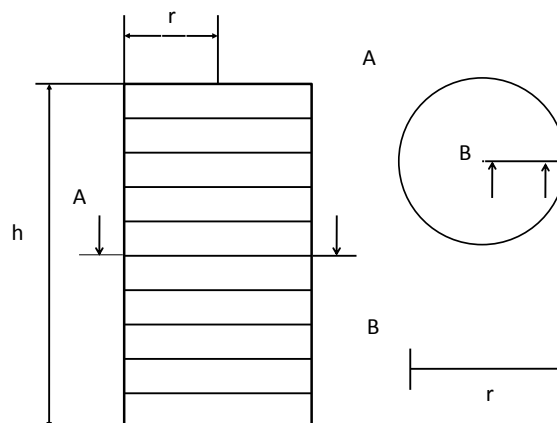


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Rundblocks

Die Scheiben besitzen keine mechanische Verbindung zueinander, sodass keine Kraftübertragung und kein Massenaustausch in axialer Richtung zwischen den Scheiben stattfindet. Die

Scheiben sind also unabhängig voneinander. Scherspannungen und -dehnungen treten nur in der Querschnittsebene einer Scheibe auf. Um zu gewährleisten, dass die Scheiben stets parallel zueinander liegen, darf die Scheibe durch axiale Bewegungen nicht verzerrt beziehungsweise gewölbt werden. Ist keine Bewegung in axialer Richtung zugelassen, so bleibt die Dehnung in axialer Richtung gleich null (ebener Dehnungszustand), $\varepsilon_{zz} = 0$.

In den zweidimensionalen Querschnitts-Stranggießmodellen, unter anderen Steinert [Ste99], Thomas et al. [LT04] und Schwertfeger et al. [SST98], ist in der Regel aber eine Bewegung senkrecht zur Querschnittsfläche erlaubt. Damit die einzelnen Scheiben zueinander parallel liegen, muss die Bedingung gelten, dass diese Bewegung an jeden Punkt gleich ist (verallgemeinerter ebener Dehnungszustand), $\varepsilon_{zz} = \text{const.}$ Steinert [Ste99] argumentiert, dass der verallgemeinerte ebene Dehnungszustand den Spannungszustand besser beschreibt, da eine mittlere Schrumpfung in Längsrichtung berücksichtigt wird. Dieser wird daher, und auch wegen der Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit anderen Rechnungen, für das Modell hier angewendet.

Bei dem erstarrenden Rundblock handelt es sich um eine Rundgeometrie, sodass die Bilanzgleichungen noch weiter vereinfacht werden können, indem für die Scheibe Rotationssymmetrie angenommen wird. Das reduziert das Problem zu einem eindimensionalen Modell. Für den neuen thermo-mechanischen Ansatz sind die Wärme-, Kraft- und Massenbilanz zu lösen. Alle Bilanzgleichungen müssen dem vereinfachten Wärmespannungsproblem angepasst werden.

6.2 Impulsbilanz des vereinfachten geometrischen Modells

Die grundlegenden Annahmen für das eindimensionale Modell führen dazu, das Kräftegleichgewicht nur in radialer Richtung zu erfüllen. Gleichung (6.1) drückt das geforderte radiale Kräftegleichgewicht in Zylinderkoordinaten aus. Die Spannung ist in Schubspannungs- und Druckkomponente aufgeteilt. Auf Grund der Unabhängigkeit der Scheiben zueinander, kann in der Impulsbilanz die Gewichtskraft vernachlässigt werden.

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) - \tau_{\theta\theta} + r \frac{\partial P}{\partial r} \quad (6.1)$$

$$F_{zz} = \int_0^R 2\pi r (\tau_{zz} + P) dr \quad (6.2)$$

r	: Radius	[m]
τ	: Schubspannung	[N m ⁻²]
P	: Druck	[N m ⁻²]
F	: Kraft	[N]

Die Gleichung (6.2) dient zur Berechnung der axialen Dehnung und bewirkt, dass diese entlang des Radius konstant wird. Zur Lösung der Impulsbilanz ist es erforderlich Anfangs- und Randbedingungen anzugeben.

6.2.1 Anfangsbedingungen der Impulsbilanz

Der Ausgangszustand im hydro-mechanischen Modell ist nicht spannungsfrei, wie es bei den Strukturmechanischen Modellen der Fall ist, sondern geschwindigkeitsfrei. Daraus folgt, dass

auch keine Schubspannungen τ vorliegen können. Es ist aber möglich, dass ein Druck P vorliegt, und somit der Ausgangszustand nicht spannungsfrei ist. Bei Erstarrungsrechnungen, für die zunächst nur flüssige Phase vorliegt, wirkt der homogen verteilte hydrostatische Druck. Durch einen bekannten Druck, ist auch die Kraft F_{zz} bestimmt.

$$v(t = 0) = 0 \quad (6.3)$$

$$\tau(t = 0) = 0 \quad (6.4)$$

$$P(t = 0) = P_{\text{Umg}} \quad (6.5)$$

Eine Unterscheidung zwischen der Erstarrungsrechnung und der Abkühlungsrechnung, die jeweils andere Ausgangszustände haben, ist beim hydro-mechanischen Modell nicht notwendig. Für die Erstarrungsrechnungen liegt im gesamten Bilanzraum die flüssige Phase und für die Abkühlungsrechnungen die feste Phase vor. Es gelten für beide Fälle die gleichen Anfangsbedingungen.

6.2.2 Randbedingungen der Impulsbilanz

Zur Lösung der Impulsbilanz müssen Randbedingungen an den beiden Endpunkten der Geometrie (Radius) vorgeschrieben werden. Da das hier gewählte Modell eindimensional ist, müssen die beiden Randbedingungen nur für die radiale Geschwindigkeit v_r definiert werden. Eine Unterscheidung zwischen Abkühlungs- und Erstarrungsrechnung muss nicht getroffen werden. Des Weiteren muss keine zwischen fester und flüssiger Phase getroffen werden, da der Phasenübergang beim hydro-mechanischen Modell homogen ist.

An der Innenseite der Geometrie ergibt sich die zu wählende Randbedingung aus der Rotationssymmetrie. Die Geschwindigkeit ist gleich null.

$$v_r = 0 \quad \text{an der Stelle } r = 0 \quad (6.6)$$

An der Außenseite ist der Umgebungsdruck gleich der radialen Spannung σ_{rr} .

$$P_{\text{Umg}} = \sigma_{rr} = \tau_{rr} + P \quad \text{für } r = r_a \quad (6.7)$$

Die auf die Scheibe lastende Kraft F_{zz} kann vorgegeben werden. Beispielsweise, kann sie von der Höhe abhängig gemacht werden.

$$F_{zz} = (\rho \cdot g \cdot h) \cdot \pi r^2 \quad (6.8)$$

6.2.3 Umgebungsdruck als Verschiebungswiderstand

Das Vergießen des Rundblocks erfolgt in wassergekühlte Kokillen. Die Kokille entzieht dem Block nicht nur Wärme, sondern bildet auch einen mechanischen Widerstand für die erstarrende Schale. Zu Beginn der Erstarrung lastet der hydrostatische Druck auf der Schale und drückt die weiche und verformbare Schale gegen die Kokillenwand. Ist die Kokille nicht Teil des Bilanzraums der Spannungsrechnung, muss eine Methode geschaffen werden, die den mechanischen Widerstand der Kokille ersetzt.

Die Kokille kann durch einen künstlich erhöhten Umgebungsdruck ersetzt werden. Der nach Außen gedrückten Schale steht dadurch ein betragsmäßig gleicher Druck entgegen. Gilt für

den Außenradius das Kräftegleichgewicht zwischen nach Außen schiebender Kraft und künstlicher Widerstandskraft, wird dieser nicht verschoben. Mit abnehmender Verschiebungskraft sinkt auch der künstliche Umgebungsdruck. Kehrt sich die Druckbelastung um, indem die erstarrte Schale auf die Schmelze drückt, setzt die Schrumpfung der Schale ein. Der wirkende Umgebungsdruck ist dann gleich dem realen Umgebungsdruck.

$$P_{Umg} = \begin{cases} P_k & \text{wenn } P_k > P_{Umg}^0 \\ P_{Umg}^0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (6.9)$$

P_k	: künstlicher Umgebungsdruck	$[\text{N m}^{-2}]$
P_{Umg}^0	: realer Umgebungsdruck	$[\text{N m}^{-2}]$
P_{Umg}	: wirkender Umgebungsdruck	$[\text{N m}^{-2}]$

6.3 Massenbilanz des vereinfachten geometrischen Modells

Wie die anderen Bilanzgleichungen lässt sich auch die Massenbilanz auf eine vereinfachte Form reduzieren. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Stahl an jeder Stelle flüssig. Die zunehmende Erstarrung bzw. Abkühlung führt zur thermischen Kontraktion des Blocks. Ein Temperaturgradient in axialer Richtung existiert nach dem Modell nicht, somit kann auch eine thermisch bedingte Dichteänderung ausgeschlossen werden. Auf Grund der fehlenden mechanischen Verbindung der Querschnitte zueinander findet auch darüber keine Verdichtung in axialer Richtung statt. Ein tangentialer Masseaustausch ist durch die Rotationssymmetrie ausgeschlossen. Die Gleichung (6.10) beschreibt die resultierende Massenbilanz in Zylinderkoordinaten für ein radiales Problem.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) = 0 \quad (6.10)$$

ρ	: Dichte	$[\text{kg m}^3]$
v_r	: radiale Geschwindigkeit	$[\text{m s}^{-1}]$

Der verallgemeinerte ebene Dehnungszustand lässt eine Dickenänderung der erstarrten Scheibe zu, sodass trotz der oben genannten Punkte eine Verdichtung in axialer Richtung zu berücksichtigen ist. Die Kontinuitätsgleichung muss daher trotz des radialen Problems axiale Massenbewegungen ausgleichen können, Gleichung (6.11).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (6.11)$$

Der axiale Term der Kontinuitätsgleichung kann formal noch weiter vereinfacht werden, da es thermische bedingt keine Dichteänderung in axialer Richtung gibt und somit $\partial \rho / \partial z = 0$ ist.

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (6.12)$$

Letztendlich ergibt sich für das vereinfachte eindimensionale Problem die angepasste Kontinuitätsgleichung, Gleichung (6.13).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.13)$$

Die Kontinuitätsgleichung gilt im Inneren des Lösungsgebietes. Es ist daher nicht notwendig, für die Dichte Randbedingungen anzugeben.

6.3.1 Anfangsbedingungen der Massenbilanz

Im Ausgangszustand liegt im gesamten Bereich die thermodynamische Dichte vor. Da keine Belastungsänderung in axialer Richtung im Ausgangszustand vorliegt, ist auch die Änderung der axialen Geschwindigkeit in axialer Richtung gleich null.

$$\rho(t=0) = \rho^{th} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}(t=0) = 0 \quad (6.15)$$

6.4 Modellierung des axialen Massestroms

Der verallgemeinerte ebene Verzerrungszustand lässt eine Massenbewegung in axialer Richtung zu, wobei die axiale Dehnungsrate entlang der Geometrie an allen Stellen gleich groß sein muss. Eine gleichgroße axiale Dehnungsrate modelliert aber einen Bilanzraum für Erstarrungsvorgänge, der aus fester und flüssiger Phase besteht, nicht optimal, da die Bewegungsgeschwindigkeiten der materiellen Punkte in den einzelnen Phasen zu unterschiedlich sind.

Eine gleichgroße axiale Dehnungsrate in der festen Phase beschreibt die thermische Kontraktion für den ebenen Verzerrungszustand besser und bietet darüber hinaus die Möglichkeit axial wirkende Kräfte zu berücksichtigen. Eine gleichgroße axiale Dehnungsrate in der flüssigen Phase kann dafür sorgen, dass der Druck in der flüssigen Phase einen konstanten Wert beibehält, wodurch ein hydrostatischer Druck modelliert werden kann. Findet keine axiale Massenbewegung in der flüssigen Phase statt, drückt die erstarrende Schale auf den flüssigen Bereich, wodurch sich in der flüssigen Phase ein Druck aufbaut. Es muss also Masse in axialer Richtung ausweichen können, um einen bestimmten und niedrigeren Druck halten zu können. Das passiert im ersten Moment der Erstarrung. Zu einem späteren Zeitpunkt ist der Schalenring fest und drückt nicht mehr auf die Schmelze. In der flüssigen Phase baut sich ein Unterdruck auf, da mit fortschreitender Erstarrung Masse zur Speisung der Schale benötigt wird. Ein Zuströmen von Masse muss erfolgen, damit der geforderte Druck aufrecht erhalten werden kann.

Beide Formen des axialen Massenaustausches können unabhängig voneinander für die jeweiligen homogenen Gebiete angewendet werden. Im heterogenen Gebiet mit fester und flüssiger Phase ist aber eine unabhängige Betrachtung beider Massenströme nicht möglich, da beide Effekte den Spannungs- und Verschiebungszustand beeinflussen. Der Übergang von einem Effekt zum anderen muss daher modelliert werden.

6.4.1 Grundlegende Gleichungen zur Modellierung des axialen Massestroms

Zur Modellierung der axialen Dehnungsrate im heterogenen Gebiet, bestehend aus fester und flüssiger Phase, werden zunächst die grundlegenden Gleichungen formuliert. Basis bilden die Impulsbilanz, siehe Gleichung (6.1), und die Massenbilanz, siehe Gleichung (6.13). Der Ausdruck $\partial v_z / \partial z$ in der Kontinuitätsgleichung entspricht der axialen Dehnungsrate, $\dot{\epsilon}_{zz}$.

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \tau_{\theta\theta} + r \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \rho \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (6.17)$$

Der axiale Term der Kontinuitätsgleichung, $\rho \dot{\epsilon}_{zz}$, wird additiv in einen festen und flüssigen Anteil aufgeteilt und mit dem Volumenanteil der flüssigen Phase gewichtet. Genauso wie der axiale Term der Kontinuitätsgleichung, wird auch der Druck additiv zerlegt.

$$\rho \dot{\epsilon}_{zz} = \rho_l g_s \dot{\epsilon}_{zz,s} + \rho_s g_l \dot{\epsilon}_{zz,l} \quad (6.18)$$

$$P = g_s P_s + g_l P_l \quad (6.19)$$

Für die jeweils homogene Phasen, also entweder feste oder flüssige Phase, ist es ausreichend eine weitere Gleichung anzugeben, damit die axiale Dehnungsrate bestimmt werden kann. Für die feste Phase kann zum Beispiel die Gleichung (6.2) die Bestimmungsgleichung sein. Für die flüssige Phase ist es sinnvoll einen Druck als Zielgröße vorzugeben.

$$F_{zz} = \int_0^R 2\pi r (\tau_{zz} + P) dr \quad (6.20)$$

$$P_l = P_l^0 \quad (6.21)$$

Für den Mischbereich aus fester und flüssiger Phase ist eine weitere Gleichung erforderlich, damit alle Größen bestimmt werden können. Die axiale Dehnungsrate der festen Phase, $\dot{\epsilon}_{zz,s}$ bleibt über die Gleichung (6.2) bestimmt. Der Druck P ist durch die Druckkorrektur bestimmt und der Druck der flüssigen Phase P_l durch den vorgegebenen Druck P_l^0 definiert. Zur Bestimmung der axialen Dehnungsrate der flüssigen Phase $\dot{\epsilon}_{zz,l}$ und des Drucks der festen Phase P_s kann folgender heuristischer Ansatz gewählt werden:

$$g_l (P_s - P_l^0) = g_s (\dot{\epsilon}_{zz,l} - \dot{\epsilon}_{zz,s}) \quad (6.22)$$

6.4.2 Vereinfachte Übergangsformel

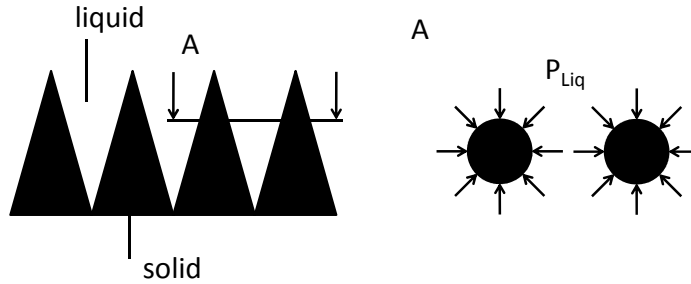


Abbildung 6.2: Druckzustand im heterogenen Gebiet

Der heuristische Ansatz zur Modellierung des Mischbereichs, Gleichung (6.22), kann im ersten Schritt durch einen einfacheren Ansatz substituiert werden. Es wird angenommen, dass der Druck der festen Phase, P_s , gleich dem Druck in der flüssigen Phase, P_l , ist. Das führt dazu, dass die axiale Dehnungsrate der flüssigen Phase $\dot{\epsilon}_{zz,l}$ gleich der axialen Dehnungsrate im Festen, $\dot{\epsilon}_{zz,s}$, ist.

$$P_s = P_l \quad (6.23)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz,l} = \dot{\epsilon}_{zz,s} \quad (6.24)$$

Die grundlegende Idee zur Modellierung des Bereichs in diesem Sinne, leitet sich aus der Abbildung (6.2) ab. Diese skizziert auf der linken Seite, die in die Schmelze hineinwachsenden

Dendriten. Der Schnitt A zeigt, wie der in der Schmelze wirkende Druck gleichmäßig auf die Dendriten wirkt. Stahl ist im Hochtemperaturbereich nahezu inkompressibel, was dazu führt, dass der Druck im Dendriten gleich dem auf ihn lastenden Druck ist. Im ersten Ansatz kann der Druck im Dendriten daher bis zur vollständigen Erstarrung konstant gesetzt werden. Die mit fortschreitender Abkühlung verbundene Verdichtung des Dendriten und die daraus resultierende Absenkung des Drucks, wird mit diesem Modellansatz im heterogenen Gebiet vernachlässigt. Diese Art der Modellierung führt dazu, dass der vorgegebene Druck solange eingestellt wird, bis keine flüssige Phase mehr vorhanden ist.

6.5 Wärmebilanz des vereinfachten geometrischen Modells

In experimentellen Untersuchungen zum Schrumpfungsverhalten von Stahllegierungen, Harste [Har89] oder Lagerstedt [KBL⁺04], sind Rundblöcke in wassergekühlte Kokillen abgegossen und während der Erstarrung vermessen worden. Die Temperatur ist während des Abkühlvorgangs sowohl im Rundblock als auch in der Kokille mit Thermoelementen gemessen worden. Der maßgebliche Wärmeabtransport findet in radialer Richtung über die Kokillen statt. Sind die Ober- und Unterseiten des Blocks isoliert, so kann eine gleiche Temperaturverteilung entlang der Höhe angenommen werden. Der Wärmestrom in axialer Richtung ist dadurch vernachlässigbar. Ebenso der tangential, da für die Block Rotationssymmetrie gilt. In guter Näherung kann somit für einen Querschnittsradius aus der Mitte des Blocks die Erfüllung der Wärmebilanz in radialer Richtung gefordert werden, Gleichung (6.25).

$$\rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + v_r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q) = 0 \quad (6.25)$$

Der konvektive Wärmetransport sowie die Wärmeerzeugung durch mechanische Arbeit sind in dem Modell hier vernachlässigbar. Für spätere Simulationen des Stranggießens sind die konvektiven Terme aber nicht zu vernachlässigen. Zur Lösung der Wärmebilanz ist es notwendig Anfangs- und Randbedingungen anzugeben.

6.5.1 Anfangsbedingungen der Wärmebilanz

Im Ausgangszustand liegt im gesamten Gebiet eine gleichmäßig verteilte Temperatur vor. Für die Erstarrungsrechnungen liegt die Starttemperatur T_{Start} in der Regel 50°C über der Liquidustemperatur T_{Liq} .

$$T(t = 0) = T_{\text{Start}} = T_{\text{Liq}} + 50 \quad (6.26)$$

Die Enthalpie kann, wegen der hier geltenden Temperatur-Enthalpie-Beziehung, mit der Starttemperatur bestimmt werden. Das gleiche gilt für die thermische Leitfähigkeit. Die thermodynamische Dichte ist zwar nicht nur durch die Temperatur bestimmt, sie kann aber formelmäßig von der Temperatur abhängig gemacht werden, wenn der Druck und die chemische Zusammensetzung konstant bleiben. Es gilt somit für die Anfangswerte:

$$H(t = 0) = H(T_{\text{Start}}) \quad (6.27)$$

$$\lambda(t = 0) = \lambda(T_{\text{Start}}) \quad (6.28)$$

$$\rho^{th}(t = 0) = \rho^{th}(T_{\text{Start}}) \quad (6.29)$$

T : Temperatur [K]

Temperaturabhängige Formeln für die Enthalpie, die thermische Leitfähigkeit und für die Dichte sind im **Anhang D** aufgeführt.

6.5.2 Randbedingungen der Wärmebilanz

Der Bilanzraum umfasst nur den erstarrenden Block und schließt eine Kokille aus. Da in dem hydromechanischen Modell die flüssige Phase Teil des Bilanzraums ist, muss für den Übergang von fester zu flüssiger Phase keine zusätzliche künstliche Randbedingung geschaffen werden. Es sind also nur zwei Randbedingungen vorzugeben. Eine für die Zylindermitte und eine für die Außenseite des erstarrenden Blocks.

Die Randbedingung für die Blockmitte ($r=0$) ergibt sich aus der Rotationssymmetrie, sodass der Wärmestrom q gleich null ist:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = 0 \quad (6.30)$$

An der Blockaußenseite wird der Wärmestrom aus dem Block durch einen Wärmeübergangskoeffizienten h und der Umgebungstemperatur T_{Umg} beschrieben.

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h (T - T_{\text{Umg}}) \quad \text{für } r = r_a \quad (6.31)$$

6.5.3 Wärmeübergangskoeffizient

Um den Kühleffekt der Kokille zu simulieren, ist es notwendig, den Wärmestrom aus dem erstarrenden Block adäquat zu modellieren. Es ist zu beachten, dass der Wärmestrom nicht konstant ist, da die thermische Kontraktion des Blocks zu einer Luftspaltbildung zwischen Block und Kokille führt. Dieser reduziert den Wärmestrom deutlich. Auch die Temperatur an der Kokilleninnenseite ist, gerade zu Beginn der Erstarrung, nicht konstant.

Die Randbedingung für die Blockaußenseite, Gleichung (6.31), sieht eine Umgebungstemperatur vor, sodass diese, sofern entsprechende Daten vorliegen, der Temperatur der Kokilleninnenseite gleichgesetzt werden kann. Der Wärmeübergangskoeffizient der Randbedingung muss dann neben der Luftspaltbildung auch die sich ändernde Umgebungstemperatur berücksichtigen. Aus den Temperaturmessungen in der Kokille bei Erstarrungsvorgängen von Rundblöcken, leitete Harste [Har89] eine von der Zeit abhängige Funktion zur Berechnung des Wärmegangskoeffizienten ab, die auch in diesem Modell angewendet wird.

$$h = 1450(1 + t)^{-0,4} \quad [W m^{-2} K^{-1}] \quad (6.32)$$

h : Wärmeübergangskoeffizient [W m⁻² K⁻¹]
 t : Zeit [s]

In ähnlicher Weise finden sich auch Beschreibungen für Übergangskoeffizienten bei Lagerstedt und Kron [Lag04], [LKYF05] und [KBL⁺04], die ähnlich wie Harste aufgebaute Experimente durchgeführt haben. Der Wärmeübergang bei den Strangießmodellen ist bei den thermomechanischen Modellen komplexer, da es hier zusätzlich noch den Einfluss des Gießpulvers zu berücksichtigen gilt. Der Wärmeabtransport über das Gießpulver ist abhängig von der Filmdicke des Gießpulvers zwischen Strang und Kokille, sowie von der Zusammensetzung des Gießpulvers.

6.6 Modellannahmen der flüssigen Phase

In der flüssigen Phase bleiben die konvektive Transport unberücksichtigt. Ein Massenaustausch in axialer Richtung ist zwar im hydro-mechanischen Modell vorgesehen, jedoch wird dadurch keine axiale Wärme generiert. Die durch den lokalen Abbau der Überhitzung erzeugte Konvektion in der Schmelze kann, wie in den meisten thermo-mechanischen Stranggießmodellen praktiziert wird, unter anderen Li et al. [CT05], durch eine erhöhte thermische Leitfähigkeit modelliert werden. Der Abbau der Überhitzung führt zu einer inhomogenen Verteilung der Temperatur und somit auch zu einer inhomogenen Verteilung der Dichte in der Schmelze. Dichtegradienten erzeugen Geschwindigkeitsfelder, die wegen des nicht modellierten Strömungsverhaltens vermieden werden müssen. Die Dichte ist daher für die flüssige Phase konstant. Der im hydro-mechanischen Modell erlaubte Massenaustausch in axialer Richtung führt jedoch zu unvermeidbaren Geschwindigkeitsgradienten. Das macht es notwendig der flüssigen Phase ein eigenes konstitutives Materialgesetz zu geben. Die flüssige Phase muss, genauso wie es reale Flüssigkeiten sind, sehr niedrigviskos sein, damit mechanische Spannungen (Schubspannungen) sofort relaxiert werden. Der flüssigen Phase kann das allgemeine elastisch-viskose Materialmodell zugeordnet werden, für das eine sehr niedrige Viskosität und ein entsprechend hoher Elastizitätsmodul gelten muss.

Kapitel 7

Lösungsprozedur des hydro-mechanischen Modells

Die Berechnung des thermo-mechanischen Zustandes der erstarrenden Scheibe mit dem hydro-mechanischen Modell umfasst das Lösen der grundlegenden Differentialgleichungen, das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems des Materialmodells und die Verbindung der Iteration- und Korrekturverfahren. Die Kraft- und Wärmebilanz lassen sich analytisch nicht lösen und müssen numerisch approximativ gelöst werden. Beide Gleichungen können so diskretisiert werden, dass für die jeweilige Bilanz ein linearisiertes Gleichungssystem erstellt werden kann. Gegenüber der Kraft- und Wärmebilanz ist die Kontinuitätsgleichung wegen der Konsistenzbedingung des hydro-mechanischen Modells analytisch lösbar, da durch diese eine Dichte als Zielgröße vorgegeben wird. Die Kontinuitätsgleichung ist iterativ im Druckkorrekturverfahren eingekoppelt. Neben dem Druckkorrekturverfahren ergibt sich ein weiteres iteratives Verfahren aus dem Materialmodell des hydro-mechanischen Modells, bei dem zusätzlich in jedem Iterationsschritt das nichtlineare Gleichungssystem des Materialmodells mit dem Newton-Verfahren gelöst wird. Zuletzt müssen zwei Korrekturgrößen im hydro-mechanischen Modell berücksichtigt werden. Zum einen der axiale Term der Kontinuitätsgleichung und zum anderen der Umgebungsdruck. Grundlage der Lösungsprozedur des hydro-mechanischen Modells ist ein inkrementelles Vorgehen, bei dem die Zustandsänderung Zeitschritt für Zeitschritt ausgerechnet wird.

7.1 Instationäre Beschreibung

Für die zu berechnende Blockscheibe beginnt die Erstarrung mit der Bildung einer dünnen festen Randschale, verursacht durch die hohe Wärmeabfuhr über die Kokille. Die Randschale wächst in das Innere der Scheibe hinein und kühlt gleichzeitig außen ab. Während der Abkühlung unterliegt der erstarrte Bereich schon thermo-mechanischen Spannungen, die durch das inhomogene Abkühlen verursacht werden. Das Ausgangsspannungsniveau der neu erstarrten Bereiche bildet der hydrostatische Druck der flüssigen Phase. Die weitere Spannungsentwicklung hängt davon ab, wie schnell die Wärme aus der Scheibe abgeführt wird und wie das Relaxationsverhalten des Stahls ist.

Die Erstarrung der Blockscheibe ist durch zwei nichtlineare Effekte gekennzeichnet. Zum einen durch die nichtlineare Wärmeabfuhr, verursacht durch die Interaktion zwischen Schale und Kokille, und zum anderen durch das nichtlineare Materialverhalten. Diese Nichtlinearitäten ermöglichen keine einfache Berechnung des Spannungs- und Dehnungszustands. Die Berech-

nung mit derart zeitabhängigen Konditionen erfolgt daher sukzessive, indem die Zustandsänderungen schrittweise für aufeinanderfolgende Zeitebenen bestimmt werden. Die berechnete Zustandsänderung ist der Ausgangszustand des nächsten Zeitschritts. Die Größe der zu bestimmenden Variable erhält man durch Aufsummierung aller inkrementellen Zuwächse.

Die Abhängigkeit der Ergebnisse der mechanischen Rechnung von den Randbedingungen der thermischen Rechnung führt dazu, dass die Temperaturverteilung in der Schale nicht unabhängig vom Spannungs- und Dehnungszustand berechnet werden kann. Eine Entkopplung von Spannungs- und Temperaturrechnung, in der für den gesamten Erstarrungsvorgang zuerst das Temperaturfeld und anschließend erst das Verschiebungsfeld bestimmt wird, ist für derart nichtlineare Vorgänge nicht genau genug. Es ist daher notwendig, in einem Zeitschritt die jeweilige thermische und mechanische Zustandsänderung auszurechnen.

Für das hydro-mechanische Testmodell ist jedoch eine Entkopplung von Temperatur- und Verschiebungsfeld innerhalb eines Zeitschritts möglich, sodass zuerst das Temperatur- und anschließend das Verschiebungsfeld ausgerechnet werden kann. Diese Näherung ist vertretbar, da die während des Erstarrungs- und Abkühlvorgangs stattfindenden Verformungen verhältnismäßig klein sind und eine Wärmeerzeugung durch mechanische Arbeit vernachlässigbar machen. Diese sequentielle Entkopplung, sowie sehr große Temperaturgradienten, die besonders in den ersten Zeitschritten am Rand auftreten, und das temperaturabhängige nichtlineare Materialverhalten begrenzen die Zeitschrittweite, sodass nur für sehr kleine Zeitschritte genaue Lösungen des thermo-mechanischen Problems zu erwarten sind. Eine genaue Lösung ist auch wegen der Konsistenzbedingung des hydro-mechanischen Modells notwendig, da der aktuelle Zustand die thermodynamische Dichte definiert.

7.2 Temperaturfeld

Der Bilanzraum schließt sowohl die flüssige Phase, den Mischbereich aus fester und flüssiger Phase, sowie die feste Phase mit ein. Beim Übergang von flüssiger zu fester Phase sowie bei den Phasenumwandlungen in der festen Phase, müssen die Umwandlungswärmen in der Berechnung des Temperaturfelds mitberücksichtigt werden. Zur Lösung des Wärmeleitungsproblems wird daher die Enthalpie-Methode angewendet, unter anderen Lewis et al. [LMR84]. Mit dieser Methode lassen sich die Temperaturen im Bereich der Phasenumwandlungen einfacher berechnen, da die Enthalpie-Temperatur-Kurve im Gegensatz zur spezifischen Wärmekapazität-Temperatur-Kurve keine Spitzen aufweist und homogener verläuft.

7.2.1 Diskretisierung der Enthalpiebilanz

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten (Vergleich Gleichung (6.25))

$$\rho \cdot r \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (7.1)$$

ist numerisch nach der Methode gelöst worden, wie sie Spitzer et al. [Sch92] anwenden. Die Differentialgleichung ist dabei diskretisiert und so umgestellt worden, dass ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Enthalpie gelöst werden kann. Zielgröße bei diesem Verfahren ist somit nicht mehr die Temperatur sondern die Enthalpie. Die Temperatur lässt sich aber einfach

aus den thermo-physikalischen Materialdaten ausrechnen. Die für dieses Modell gewählte Diskretisierungsvorschrift ist in der Abbildung (7.1) dargestellt. Die Diskretisierung im einzelnen und die Methode nach Spitzer et al. [Sch92] ist im **Anhang (B)** wiedergegeben.

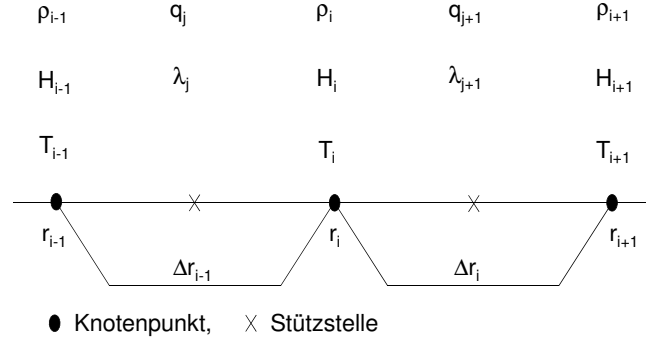


Abbildung 7.1: Diskretisierung Enthalpiebilanz

Für die Knotenpunkte i gilt:

* Radius	r_i	[m]
* Temperatur	T_i	[K]
* Enthalpie	H_i	[J kg ⁻¹]
* Dichte	ρ_i	[kg m ⁻³]

Für die Stützstellen j gilt:

* Wärmeleitfähigkeit	λ_j	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
* Wärmestromdichte	q_j	[J m ⁻² s ⁻¹]

7.2.2 Linearisiertes Gleichungssystem des Temperaturproblems

$$a_i \cdot H_{i-1,ti+1}^{it} + b_i \cdot H_{i,ti+1}^{it} + c_i \cdot H_{i+1,ti+1}^{it} = d_i \quad (7.2)$$

H	:	Enthalpie
$a, b, c, d,$:	Koeffizienten
i	:	Index für Knotenpunkt
it	:	Index für Iterationsschritt
ti	:	Index für Zeitschritt

Die zur Lösung der Gleichung (7.2) benötigten Koeffizienten sind im **Anhang (B)** hergeleitet worden. In diesem sind auch die Randbedingungen ausformuliert worden.

$$a_i = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_j (r_i + r_{i-1})}{\Delta r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \cdot \frac{T_{i-1,ti+1}^{it-1}}{H_{i-1,ti+1}^{it-1}} \quad (7.3)$$

$$b_i = \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda_{j+1} (r_{i+1} + r_i)}{\Delta r_{i+1} (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} + \frac{\Delta t \cdot \lambda_j (r_i + r_{i-1})}{\Delta r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \right) \cdot \frac{T_{i,ti+1}^{it-1}}{H_{i,ti+1}^{it-1}} + \rho_{i,ti+1}^{it-1} \cdot r_i \quad (7.4)$$

$$c_i = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_{j+1} (r_{i+1} + r_i)}{\Delta r_{i+1} (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \cdot \frac{T_{i+1,ti+1}^{it-1}}{H_{i+1,ti+1}^{it-1}} \quad (7.5)$$

$$d_i = \rho_{i,ti+1}^{it-1} \cdot r_i \cdot H_{i,ti} \quad (7.6)$$

t	: Zeit	[s]
λ	: thermische Leitfähigkeit	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
r	: Radius	[m]
T	: Temperatur	[K]
ρ	: Dichte	[kg m ⁻³]
j	: Index für Stützstelle	

Die zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung benötigten temperaturabhängigen Materialkonstanten, also die Enthalpie, die Dichte und die Wärmeleitfähigkeit, können mit den im **Anhang (D)** aufgeführten Gleichungen berechnet werden.

7.3 Geschwindigkeitsfeld

7.3.1 Diskretisierung der Impulsbilanz

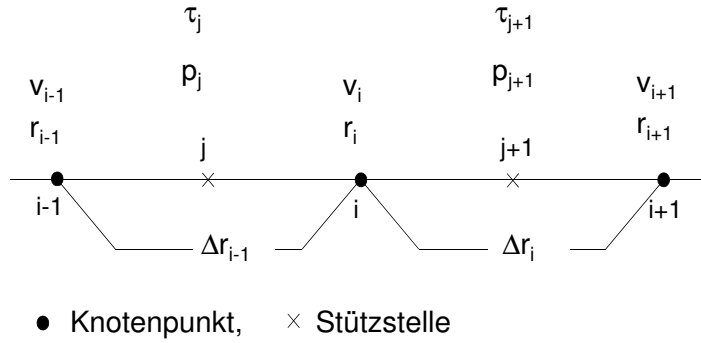


Abbildung 7.2: Diskretisierung der Impulsbilanz

Für die Knotenpunkte i gilt:

* Radius	r_i	[m]
* Geschwindigkeit	v_i	[m s ⁻¹]

Für die Stützstellen j gilt:

* Schubspannung	τ_j	[N m ⁻²]
* Druck	p_j	[N m ⁻²]

Die Impulsbilanz in radialer Richtung in Zylinderkoordinaten für den rotationssymmetrischen ebenen Fall (Vergleich Gleichung (6.1))

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \tau_{\theta\theta} + r \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (7.7)$$

soll in analoger Weise zur Enthalpiebilanz für die Geschwindigkeit gelöst werden. Das ist möglich, wenn die Gleichung für das im **Kapitel 5** formulierte mehrphasige visko-elastische Materialmodell (Gleichung 5.20)

$$\dot{\varepsilon}^d(v) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\tau_I}{E_I^{\text{eff}}} \right) - \frac{\tau_I}{2 \mu_I^{\text{eff}}} \quad (7.8)$$

als Gleichung für die Schubspannung $\tau(E, \mu, \dot{\varepsilon}(v), t)$ ausgedrückt werden kann. Die Gleichung (5.20) kann so diskretisiert und umgestellt werden, dass sich für die jeweilige Schubspannungskomponente ein linearer Ausdruck ergibt.

$$\tau_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}(v) A_2 + B_{2,ij} \quad (7.9)$$

τ_{ij}	: Schubspannungskomponente	$[\text{N m}^{-2}]$
$\dot{\epsilon}_{ij}$: Dehnungsratenkomponente	$[\text{s}^{-1}]$
$A_2, B_{2,ij}$: Koeffizienten	

Die Diskretisierung und die Umformulierung der Gleichung (5.20) ist im **Anhang A.3** ausführlich dargestellt. Auch die Koeffizienten A_2 und $B_{2,ij}$ sind in diesem ausformuliert.

7.3.2 Linearisiertes Gleichungssystem des Geschwindigkeitsfeldes

$$a_i \cdot v_{i-1} + b_i \cdot v_i + c_i \cdot v_{i+1} = d_i \quad (7.10)$$

v	: Geschwindigkeit
$a, b, c, d,$: Koeffizienten
i	: Indize für Knotenpunkt

Die Diskretisierung der Impulsbilanz und der Dehnungsrate, sowie die Herleitung der sich für die Gleichung (7.10) ergebenden Koeffizienten sind im **Anhang C** dargestellt. Des Weiteren sind in diesem die diskretisierten Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld aufgeführt.

$$a_i = A_{2,j} \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})} \right) \quad (7.11)$$

$$b_i = A_{2,j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)} \right) \\ A_{2,j} \left(\frac{(-1) \cdot (r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})} \right) \quad (7.12)$$

$$c_i = A_{2,j+1} \left(\frac{(r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)} \right) \quad (7.13)$$

$$d_i = B_{2,rr,j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})} \right) + B_{2,rr,j} \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})} \right) \\ + \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j+1} + \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j} - 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (7.14)$$

r	: Radius	$[\text{m}]$
P	: Druck	$[\text{N m}^{-2}]$
$A, B,$: Koeffizienten	
$rr, \theta\theta$: Index für Koordinatenrichtungen	
j	: Index für Stützstelle	

7.4 Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung

Die Erhaltung der Masse ist im Allgemeinen durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben. Die Kontinuitätsgleichung resultiert aus der Bilanzierung von Massenströmen an einem Kontrollvolumen. Ist das Bilanzvolumen aber nicht an einem Ort verankert, sondern bewegt sich durch den

Raum, muss die Bewegungsgeschwindigkeit des Bilanzvolumens in der Massenbilanz berücksichtigt werden.

Dieser Fall trifft auf die Lösungsprozedur des hydro-mechanischen Konzeptmodells zu. Das inkrementelle Vorgehen ermöglicht es, an jedem Knotenpunkt für jedes Inkrement eine Verschiebung aus den vorliegenden Geschwindigkeiten auszurechnen. Mit den Verschiebungen wird die Position der Radien in radialer Richtung korrigiert. Die an den Knotenpunkten vorliegende Geschwindigkeit entspricht nun genau der Geschwindigkeit, mit der sich die Massen in radialer Richtung bewegen. Bewegt sich ein finites Volumenelement mit den Knotenpunkten, so ist die Geschwindigkeit seiner Eigenbewegung gleich der Bewegungsgeschwindigkeit der Massen. Der radiale Nettofluss in ein Kontrollvolumen ist somit gleich null.

Eine axiale Bewegung von Knotenpunkten ist nur theoretisch möglich. Im verallgemeinerten ebenen Dehnungszustand werden zwar axiale Massenströme zugelassen, die Geometrie bleibt aber eindimensional. Es kann eine Höhe fiktiv angenommen und mit Hilfe der axialen Massenbewegungen eine Höhenänderung ausgerechnet werden. Die Bewegung der Ränder des Bilanzvolumens entspricht auch in axialer Richtung den Bewegungen der Massen. Der Nettofluss in axialer Richtung ist somit wie der radiale Fluss gleich null.

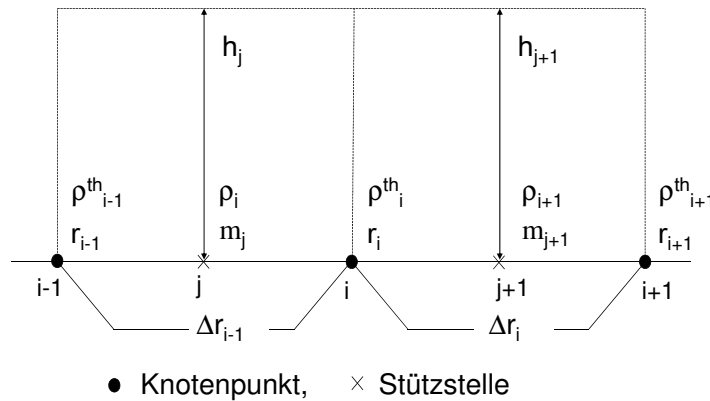


Abbildung 7.3: Diskretisierung der Massenbilanz

Für die Knotenpunkte i gilt:

* Radius	r_i	[m]
* thermod. Dichte	ρ_i^{th}	[kg m ⁻³]

Für die Stützstellen j gilt:

* Dichte	ρ_j	[kg m ⁻³]
* Masse	m_j	[kg]
* Höhe	h_j	[m]

Das Wegfallen der Nettoströme in das finite Bilanzvolumen vereinfacht die Bilanzierung der Masse. Gilt die in der Abbildung (7.3) dargestellte Diskretisierung, kann die Gesamtmasse der Geometrie wie folgt approximiert werden:

$$\int_0^R 2\pi r h \rho dr \approx \sum_{j=1}^m \Delta r_j 2\pi r_j h_j \rho_j \quad (7.15)$$

Die Masse kann durch den Finiten Volumen Ansatz an jeder Stützstelle für ein Volumenelement

bestimmt werden.

$$m_j = 2 \pi r_j \Delta r_i h_j \rho_j \quad (7.16)$$

Es gilt für die Masse eines Volumenelementes, dass diese erhalten bleiben muss. Sie ist also immer gleich der Ausgangsmasse m_j^0 .

$$m_j^0 = m_j \quad (7.17)$$

Aus den Gleichungen (7.16) und (7.17) ergibt sich die Dichte eines finiten Volumenelements.

$$\rho_j = \frac{m_j^0}{2 \pi r_j \Delta r_i h_j} = \frac{m_j^0}{V_j} \quad (7.18)$$

Die Dichte eines finiten Volumenelements lässt sich somit aus dessen Volumen und dessen Ausgangsmasse berechnen.

7.5 Korrekturverfahren

Die Lösung des hydro-mechanischen Konzeptmodells erfordert die Definition mehrerer Bestimmungsgleichungen. Für den Druck wird die Lösung der Kontinuitätsgleichung als Bestimmungsmaß herangezogen. Eine weitere Bestimmungsgleichung ist für den axialen Term der Kontinuitätsgleichung $\partial v_z / \partial z$ notwendig. Für diese Gleichung ist eine Fallunterscheidung heranzuziehen, da der Massenstrom aus der axialen Richtung für feste und flüssige Phase an andere Konditionen gebunden ist. Eine letzte Bestimmungsgleichung muss für den Außendruck definiert werden, damit für den Fall, dass die erstarrte Schale nach außen gedrückt wird, der Verschiebung ein Widerstand entgegengesetzt wird.

7.5.1 Berechnung des Drucks

Die Bestimmungsgleichung des Drucks ist Teil des iterativen Verfahrens zur Erfüllung der Kraft- und Massenbilanz. Die Druckkorrektur stellt die Kopplung zwischen Massen- und Impulsbilanz dar. Bei der Druckkorrektur wird in Abhängigkeit der Dichteänderung eine Druckänderung bestimmt. Als Zielgröße für die berechnete Dichte dient dabei die auf die Stützstellen interpolierte thermodynamische Dichte.

$$P_j^{it} - P_j^{it-1} = \alpha_D (\rho_j^{it} - \rho_j^{th}) \quad (7.19)$$

α_D : Relaxationsfaktor
 it : Iterationsindex

7.5.2 Bestimmungsgleichung des axialen Massenstroms (flüssige Phase)

Als Bestimmungsmaß für den axialen Massenstrom in der flüssigen Phase dient der Druck. Ist der Druck so eingestellt, dass er dem in der flüssigen Phase gleicht, so ändert sich der axiale Massenstrom nicht mehr.

$$\left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{l,j}^{it} - \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{l,j}^{it-1} = \alpha_l (P_j^{it} - P_{\text{Liq},j}) \quad (7.20)$$

α_l : Relaxationsfaktor
 P_{Liq} : vorgegebener Druck [N m⁻²]
 l : Indx für flüssige Phase

7.5.3 Bestimmungsgleichung des axialen Massenstroms (feste Phase)

Die Gleichung (6.2)

$$F_{zz} = \int_0^R 2\pi r (\tau_{zz} + P) dr \quad (7.21)$$

kann als Bestimmungsgleichung für den axialen Massenstrom der festen Phase herangezogen werden. Bezogen auf die Fläche, kann die vorgegebene Kraft F_{zz} als vorgegebene Spannung σ_z^0 ausgedrückt werden. Die Spannung σ_z^0 gilt für jede Stützstelle und kann mit der dort wirkenden Axialspannung $\sigma_{z,j}$ verglichen und solange geändert werden, bis sich beide Axialspannungen gleichen. Damit der erstarrte Bereich vom flüssigen abgetrennt wird, muss der Radius mit dem Anteil der festen Phase gewichtet werden.

$$\left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{s,j}^{it} - \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{s,j}^{it-1} = -\alpha_s \frac{\sum_{j=1}^m 2\pi r_j (\sigma_{z,j}^{it} - \sigma_{z,j}^0) (1 - g_{l,j}) \Delta r_j}{\sum_{j=1}^m 2\pi r_j (1 - g_{l,j}) \Delta r_j} \quad (7.22)$$

α_s	: Relaxationsfaktor	
σ_z^0	: vorgegebene Axialspannung	[N m ⁻²]
g	: Volumenanteil	[m]
s	: Index für feste Phase	

7.5.4 Verschiebungswiderstand

In dem hydro-mechanischen Modell ist die Kokille nicht mit modelliert worden. Es musste daher eine Rechenvorschrift erstellt werden, welche die Auswirkungen einer Kokille auf die Spannung und die Verschiebung der erstarrenden Schale simuliert, falls die Schale gegen die Kokille gedrückt wird (siehe auch Kapitel (6.2.3)). Methodisch ist das für diesen Fall so gelöst worden, dass ein künstlicher Umgebungsdruck auf die Schale wirkt. Für diesen wird der Außenradius r_n als Bestimmungsmaß herangezogen. Ist der berechnete Außenradius r_n größer als der ursprüngliche Außenradius r_n^0 ,

$$r_n > r_n^0 \quad (7.23)$$

so ist der wirkende Umgebungsdruck zu klein, um die Ausdehnung der Schale zu verhindern. Der Umgebungsdruck muss daher erhöht werden. Der Umgebungsdruck ist eingestellt, wenn der berechnete Außenradius dem ursprünglichen Außenradius gleicht. Für den Fall

$$r_n < r_n^0 \quad (7.24)$$

entspricht der wirkende Außendruck dem Umgebungsdruck.

$$P_k^{it+1} = \max \left(\left(1 + \alpha_P \frac{r_n - r_n^0}{r_n^0} \right) P_k^{it}; P_{Umg} \right) \quad (7.25)$$

P_k	: künstlicher Umgebungsdruck	[N m ⁻²]
P_{Umg}	: wirkender Umgebungsdruck	[N m ⁻²]
α_P	: Relaxationsfaktor	
r_n^0	: ursprünglicher äußerer Radius	[m]

7.6 Übersicht Lösungsschema

Die Berechnung der thermo-mechanischen Zustandsänderung des hydro-mechanischen Modells erfolgt zeitschrittweise, wobei zunächst das Temperaturfeld und anschließend erst das Verschiebungsfeld ausgerechnet wird. Die Berechnung des Verschiebungsfeldes umfasst die Kombination zweier iterativer Verfahren mit zwei zusätzlichen Bestimmungsgleichungen. Im ersten iterativen Verfahren (Druckkorrektur) tritt eine Bestimmungsgleichung für den Druck auf. Im zweiten Verfahren (Kopplung zum eindimensionalen Vergleichsmodell) muss ein nichtlineares Gleichungssystem pro Iterationsschritt gelöst werden, um die effektiven Proportionalitätsvariablen (Elastizitätsmodul, Viskosität) zu bestimmen.

Das Lösen der Impulsbilanz unter Berücksichtigung aller drei Bestimmungsgleichungen und im besonderen Maße der materialspezifischen Proportionalitätsvariablen, kann zu einer hohen Anzahl von Iterationsschritten führen. Jeder Iterationsschritt ändert das Geschwindigkeitsfeld und somit auch den Spannungszustand, was wiederum eine Zustandsänderung im eindimensionalen Vergleichsmodell zur Folge hat. Ist das Material sehr viskos, reagiert es sehr sensibel auf Spannungsänderungen und erschwert dadurch die Konvergenz. Eine Entlastung im Iterationsprozess bietet eine zeitschrittversetzte Lösung des eindimensionalen Vergleichsmodells, was die effektiven Proportionalitätsvariablen für die Bilanzierung der Kraft im Rahmen der Iteration in der Zeitebene konstant werden lässt. Eine zeitschrittversetzte Methode ist beispielsweise auch von Jablonka [Jab95] benutzt worden, die ihr spannungsabhängiges Kriechgesetz mit den Spannungen des vorangegangenen Zeitschritts berechnet.

Das resultierende Gesamtlösungsschema des hydro-mechanischen Modells zeigt die Abbildung (7.4). Beginnend mit der Berechnung der Temperatur T aus der Enthalpiebilanz, schließt daran das Druckkorrekturverfahren an. Im Druckkorrekturverfahren wird zunächst die Impulsbilanz gelöst, wofür der effektive Elastizitätsmodul E^{eff} und die effektive Viskosität μ^{eff} der Vorgängerzeitebene, der Druck P und der Umgebungsdruck P_{Um_g} benötigt werden. Mit der ausgerechneten Geschwindigkeit v , den effektiven Proportionalitätsvariablen und dem Druck, kann der Schubspannungstensor τ aktualisiert und somit der axiale Term der Kontinuitätsgleichung $\partial v_z / \partial z$ korrigiert werden. Mit dem erneuerten axialen Term und der Geschwindigkeit kann die Dichte ρ neu berechnet und mit dieser dann der Druck korrigiert werden. Im letzten Schritt der Iteration wird der Umgebungsdruck bestimmt. Der korrigierte Druck und der korrigierte Umgebungsdruck gehen wieder in die Lösung der Impulsbilanz ein. Die Iteration läuft solange bis alle Konvergenzkriterien erfüllt sind. Nach dem Druckkorrekturverfahren schließt die Berechnung der effektiven Proportionalitätsvariablen an, indem zunächst die Vergleichsspannung nach von Mises $\bar{\sigma}$ als Eingabegröße des eindimensionalen Vergleichsmodells ausgerechnet wird. Aus der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems des Vergleichsmodells werden die effektiven Proportionalitätsvariablen neu ausgerechnet.

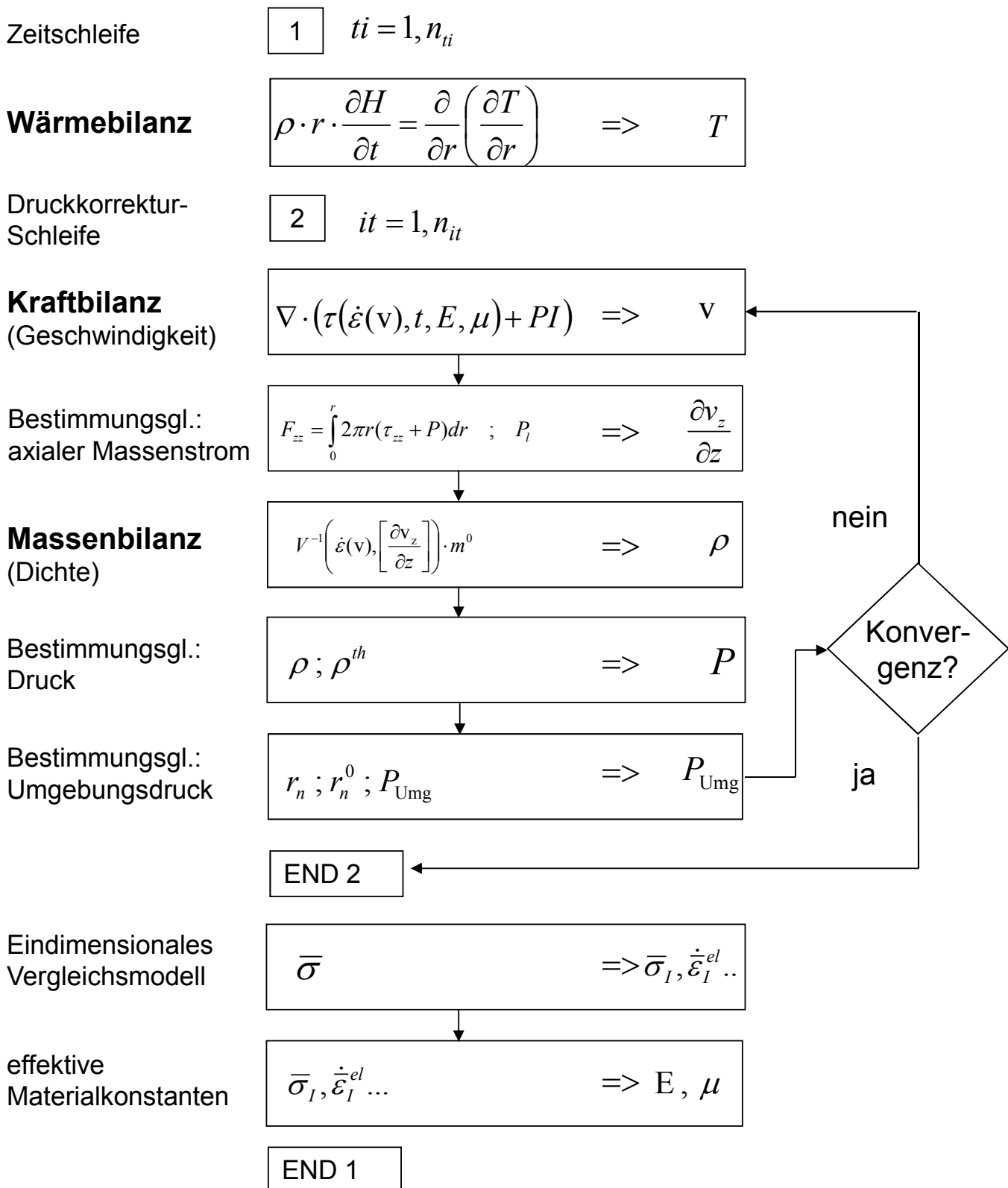


Abbildung 7.4: Lösungsschema des hydro-mechanischen Konzeptmodells

Kapitel 8

Untersuchungen

Die Untersuchungen in dieser Arbeit verfolgen das Ziel, den theoretisch formulierten und im hydro-mechanischen Beispielmmodell umgesetzten neuen methodischen Ansatz zu verifizieren und zu analysieren. Das hydro-mechanische Modell berücksichtigt die Kompressibilität unabhängig von den Materialgesetzen, modelliert das Material phasenspezifisch und wendet einen eigenen Kopplungsalgorithmus zum allgemeinen Spannungsmodell an. Das hydro-mechanische Modell selber, sowie die allgemeine Lösungsprozedur des vereinfachten thermo-mechanischen Problems müssen auf ihre Validität hin untersucht werden. Die Unterschiede zwischen einer massenkonsistenten Formulierung im hydro-mechanischen Modell und der Näherungslösung durch additive Zerlegung der Dehnungen im strukturemechanischen Ansatz müssen analysiert werden. Für Spannungsrechnungen bei Erstarrungsvorgängen ist darüber hinaus der Phasenübergang von flüssiger zu fester Phase mit dem vereinfachten Übergangsmodell zur Modellierung der axialen Massenströme auszuwerten.

Das von Weiner & Boley [WB63] analytisch gelöste eindimensionale Wärmespannungsproblem eines Erstarrungsvorgangs, bietet sich zur Überprüfung des hydro-mechanischen Modells an. Mit der analytischen Lösung lässt sich das thermische und mechanische Verhalten des hydro-mechanischen Modells für ein idealisiertes Materialverhalten validieren. Mit dem Finite Elemente Programm ABAQUS können einfache Abkühlungsrechnungen durchgeführt werden, mit denen zum einen das Spannungsmodell validiert und zum anderen die Auswertung zur massenkonsistenten Formulierung von Wärmespannungsproblemen durchgeführt werden kann. Für Abkühlungsrechnungen ist das hydro-mechanische Modell mit dem strukturemechanischen Modell vergleichbar, da es keinen Einfluss auf die Ergebnisse durch Modellierungstechniken für die flüssige Phase gibt.

Für Spannungsrechnungen bei Erstarrungsvorgängen ist ein zur Validierung der Ergebnisse geeigneter Vergleich zwischen den beiden Ansätzen nicht mehr möglich, da die Modellierung der flüssigen Phase im hydro-mechanischen Modell anderen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Wichtigster Unterschied ist, dass es für die flüssige Phase im hydro-mechanischen Modell eine eigene Axialbewegung gibt und dadurch andere Massenbewegungen in der flüssigen Phase als in der festen Phase stattfinden. Die Bewertung der Ergebnisse der Spannungsrechnung bei Erstarrungsvorgängen lässt sich aber anhand eines Vergleichs zwischen ausgerechneten und gemessenen Schrumpfungskurven reiner Eisenkohlenstofflegierungen durchführen. Des Weiteren kann für Erstarrungsrechnungen das Spannungs- und Dehnungsbild beim Übergang von flüssiger zu fester Phase analysiert werden.

8.1 Vergleich mit der analytischen Lösung nach Weiner und Boley

Die analytische Lösung eines thermo-mechanischen Spannungsproblems bei Erstarrungsvorgängen nach Weiner und Boley [WB63] wird zur Validierung der Ergebnisse des hydro-mechanischen Modells verwendet. In analoger Weise haben Thomas et al. [KT06], [Hib09], [LT02], Kristianson [Kri82], Huespe [RHC03], und andere ihre thermo-mechanischen Modelle validiert. Die Ergebnisse nach Weiner und Boley [WB63], die zur Validierung des hydromechanischen Modells verwendet werden, sind dabei aus der Veröffentlichung von Li [CT05] entnommen worden.

Weiner und Boley [WB63] simulieren mit ihrem Modell das Erstarrungsverhalten des mittleren Bereiches einer Bramme, welcher nicht durch die zweidimensionale Wärmeabfuhr der Kantenbereiche und der damit verbundenen Verzerrung beeinflusst wird. Ebenso werden Ausbaucheffekte vernachlässigt, sodass ein gleichmäßiges Erstarrungsverhalten angenommen werden kann. Mit diesen Annahmen kann das thermo-mechanische Problem auf ein eindimensionales reduziert werden. Anstelle einer numerisch Lösung, wählen die Autoren eine analytische, indem das Temperaturprofil mit der Neumannschen Lösung ausgerechnet wird. Eine Lösung für das Spannungsproblem wird in analoger Weise zum Temperaturproblem entwickelt

Li [CT05] benutzt zur Lösung des idealisierten Problems die in der Tabelle (8.1) aufgelisteten Konstanten. Darüber hinaus ist das Materialverhalten in der analytischen Lösung elastisch-ideal plastisch mit einer temperaturabhängigen Fließspannung, welche mit zunehmender Temperatur von $\sigma_y = 20 \text{ [MN m}^{-2}\text{]}$ bei $T = 1000 \text{ [}^\circ\text{C]}$ auf $\sigma_y = 0 \text{ [MN m}^{-2}\text{]}$ bei Solidus abnimmt. Aus numerischen Gründen ist die Fließspannung bei Solidus auf $\sigma_y = 0,01 \text{ [MN m}^{-2}\text{]}$ heraufgesetzt worden.

thermische Leitfähigkeit	33	$\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
spezifische Wärmekapazität	661	$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
latente Wärme	272000	$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Elastizitätsmodul (solid)	40	GN m^{-2}
Elastizitätsmodul (liquid)	14	GN m^{-2}
thermischer linearer Expansionskoeffizient	$20 \cdot 10^{-6}$	K^{-1}
Dichte	7500	kg m^{-3}
Liquistemperatur	1494,45	$^\circ\text{C}$
Solidustemperatur	1494,35	$^\circ\text{C}$
Oberflächentemperatur	1000	$^\circ\text{C}$

Tabelle 8.1: Konstanten der analytischen Lösung aus Li[CT05]

Die konstanten Werte der Tabelle (8.1) können aber nicht eins zu eins für das hydro-mechanische Modell übernommen werden. Da keine thermische Dehnung im hydro-mechanischen Modell existiert, muss der thermische lineare Expansionskoeffizient α

$$\alpha(T) = \frac{\varepsilon^{th}(T_{\text{Ref}}) - \varepsilon^{th}(T)}{T_{\text{Ref}} - T} = 20 \cdot 10^{-6} \quad (8.1)$$

in eine temperaturabhängige Dichte umgerechnet werden. Es folgt für die Dichte:

$$\rho(T) = \frac{\rho_{\text{Ref}}}{(1 + \alpha \cdot (T_{\text{Ref}} - T))^3} \quad (8.2)$$

Die Referenzdichte $\rho_{\text{Ref}} = 7500 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$ ist die Dichte bei Solidus und die Referenztemperatur T_{Ref} ist dementsprechend die Solidustemperatur. Die Dichte ist für Temperaturen größer der Solidustemperatur konstant. Da in dem hydro-mechanischen Modell auch keine spezifische Wärmekapazität verwendet wird, muss diese in eine temperaturabhängige Enthalpie umgerechnet werden. Die spezifische Wärmekapazität ist konstant, somit ergibt sich eine lineare Enthalpie, deren Wert beim absoluten Nullpunkt gleich Null gesetzt werden kann. Die latente Wärme wird beim Phasenübergang von fester zu flüssiger Phase aufaddiert. Ein anteilmäßiger Übergang ist wegen des extrem kleinen Erstarrungsintervall vernachlässigbar.

$$H(T) = \begin{cases} 661 \cdot T & , \text{ wenn } T \leq T_S \\ 661 \cdot T + H_f & , \text{ ansonsten} \end{cases} \quad (8.3)$$

Die thermische Randbedingung des hydro-mechanischen Modells bleibt unverändert. Die konstante Oberflächentemperatur wird erreicht, indem entsprechend viel Wärme von der Oberfläche abgeführt wird. Dazu ist der Wärmeübergangskoeffizient mit $h = 10^6 \text{ [W m}^{-2} \text{ K}^{-1}\text{]}$ angenommen worden. Dies führt dazu, dass die Oberflächentemperatur nicht exakt den geforderten Wert erreicht, was aber nur sehr wenig Einfluss auf die Lösung hat.

Die Fließbedingung lässt sich problemlos in das eindimensionale Vergleichsmodell des hydro-mechanischen Modells integrieren, indem dem Reibelement die temperaturabhängige Fließspannung zugewiesen wird. Des Weiteren weist das Reibelement keine Verfestigung auf. Ideal plastisches Verhalten lässt sich aber trotzdem nur näherungsweise einstellen, da das Dämpfelement numerisch bedingt nicht unendlich weich eingestellt werden kann. Zum einen führen Viskositäten von $\mu < 10^{-3} \text{ [s MN m}^{-2}\text{]}$ eines idealen Dämpfers zu Konvergenzproblemen beim Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems und zum anderen führen Viskositäten von $\mu < 10^0 \text{ [s MN m}^{-2}\text{]}$ zu Konvergenzproblemen bei der Lösung der diskretisierten Impulsbilanz. Letzteres Problem determiniert also die Größe der Viskosität. Dabei ist festgestellt worden, dass eine Viskosität von $\mu = 10^2 \text{ [s MN m}^{-2}\text{]}$ für beide Phasen ausreichend gering ist.

Die Bilder (8.1) und (8.2) vergleichen die Ergebnisse des hydro-mechanischen Spannungsmodells mit den Ergebnisse der analytischen Lösung des Wärmespannungsproblems. Der berechnete Spannungsverlauf des hydro-mechanischen Modells gleicht dabei im wesentlichen dem vorgegebenen Spannungsverlauf. Der Spannungsverlauf wechselt dabei an den gleichen Positionen die Richtung. Einzig beim ersten Knickpunkt von der Oberfläche aus betrachtet, gleitet der Spannungsverlauf etwas ab, was zu einer geringen Verschiebung führt. Diese beeinflusst auch das Ergebnis des Temperaturprofils, welches ohne diese Verschiebung absolut identisch mit dem vorgegebenen Verlauf wäre.

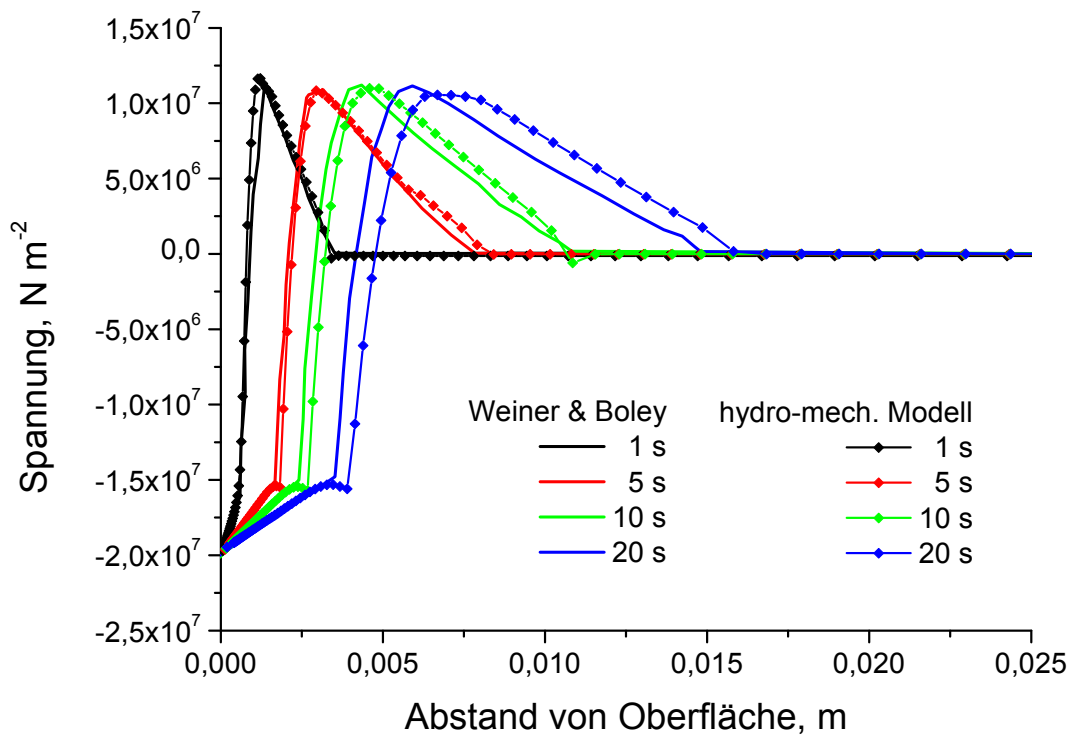


Abbildung 8.1: Spannungsprofile der analytischen Lösung und des hydro-mechanischen Modells

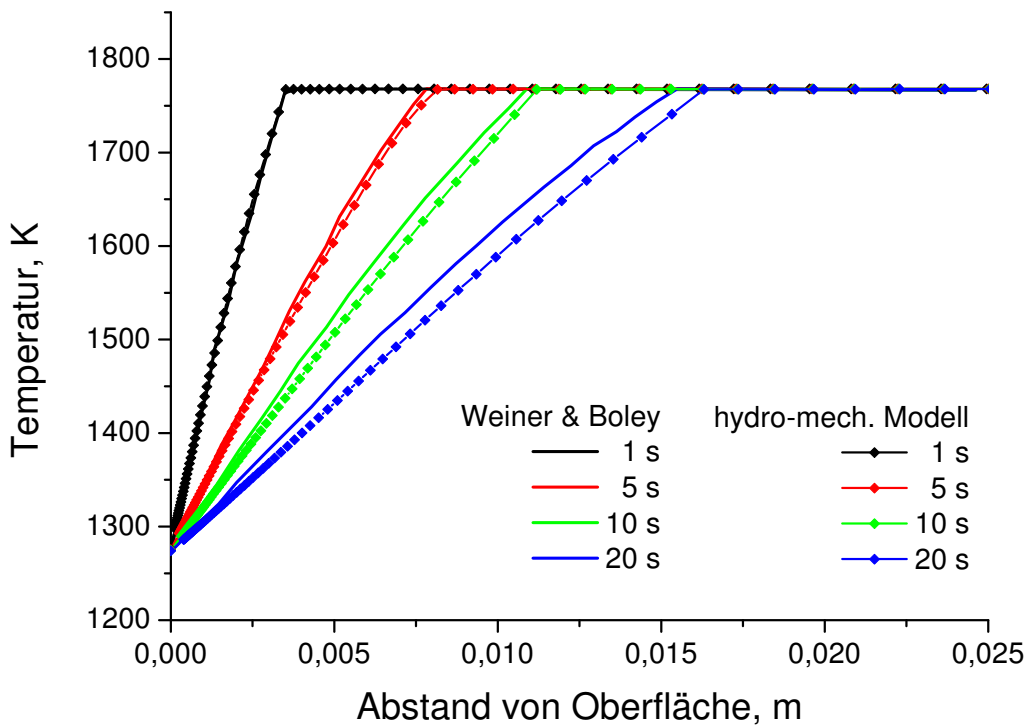


Abbildung 8.2: Temperaturprofile der analytischen Lösung und des hydro-mechanischen Modells

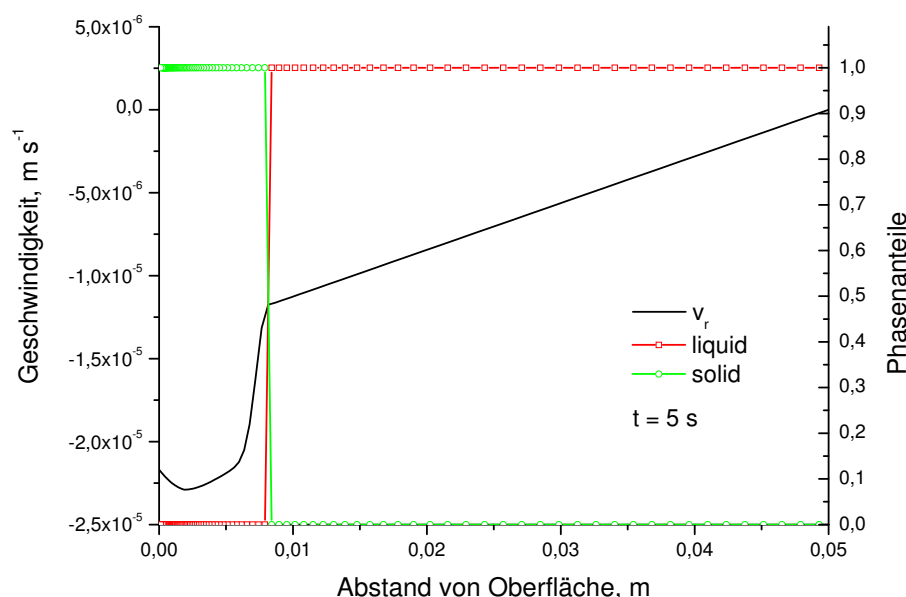


Abbildung 8.3: Geschwindigkeits- und Phasenprofil nach 5 Sekunden

Der Unterschied in den Spannungsverläufen kann aus der Temperaturrechnung resultieren. Das Enthalpieverfahren ist für die Lage der Erstarrungsfront nur bis auf eine Gitterweite genau. Eine andere Erklärung lässt sich aus der Abbildung (8.3) ableiten. Die Abbildung zeigt das Geschwindigkeits- und Phasenprofil des hydro-mechanischen Modells nach 5 Sekunden. Es ist ein deutliches Geschwindigkeitsprofil in der flüssigen Phase zu erkennen, was dazu führt, dass es eine stärker nach Innen gerichtete Bewegung als in der analytischen Lösung gibt. Diese führt zu einer Verzerrung der Scheibe, beziehungsweise führt zum Fließen am ersten von der Oberfläche aus betrachteten Knickpunkt des Spannungsverlaufs.

Während bei den strukturellen Modellen, unter anderen Hibbeler [Hib09] und Li [CT05], die Oberfläche fest eingespannt ist, siehe Abbildung (8.4), bleibt die Innenseite losgelagert. Es ist daher eine freie Bewegung entlang der x-Koordinate möglich. Das hydro-mechanische Modell dagegen lagert beide Seiten fest, lässt aber Massenbewegungen in axialer Richtung unter der Kondition zu, dass ein vorgegebener Druck eingestellt wird. Der Druck in der flüssigen Phase ist gleich dem Umgebungsdruck, wodurch es keinen Überdruck in der flüssigen Phase gibt. Aus der flüssigen Phase strömt Masse in vertikaler Richtung ab, damit der vorgegebene Druck erhalten bleibt. Das führt zu einem negativen Geschwindigkeitsprofil für die flüssige Phase, was einer nach Innen gerichteten Bewegung entspricht.

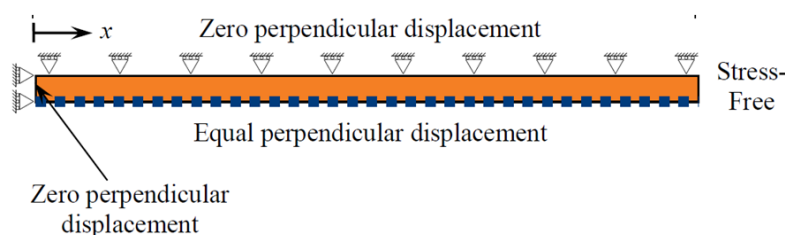


Abbildung 8.4: Rechengebiet Hibbeler [Hib09]

8.2 Abkühlungsrechnung: Kompressibilität

Das hydro-mechanische Modell berücksichtigt die Kompressibilität in der Dichte. Um diesen Ansatz zu überprüfen, sind verschiedene Kompressibilitäten in Abkühlungsrechnungen getestet worden. Die Ergebnisse dieser Abkühlungsrechnungen sind mit den Rechenergebnissen einer zweidimensionalen FEM-Scheibe, siehe **Anhang E**, verglichen worden.

Die Vergleichbarkeit beider Modelle setzt gleiche Anfangs- und Randbedingungen, sowie ein gleiches Materialmodell voraus. Der Anfangszustand ist spannungsfrei und es existiert eine homogen verteilte Temperatur von $T = 1000$ [K]. Am Rand ist eine thermische Randbedingung mit einer Umgebungstemperatur von $T = 300$ [K] und einem Wärmeübergangskoeffizienten von $h = 1000$ [W m⁻² K⁻¹] vorgegeben. Um einen Einfluss von Fließeckten auszuschließen, ist für beide Modelle das Materialverhalten als rein elastisch angenommen worden.

Im strukturmechanischen Ansatz geht in das verallgemeinerte Hookesche Gesetz, Gleichung (8.4), der Elastizitätsmodul E , die Querkontraktion ν ein. Aus der allgemein bekannten Aufteilung des Hookeschen Gesetzes in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil können der Kompressionsmodul $K(E, \nu)$ und der Schubmodul $G(E, \nu)$ abgeleitet werden.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{3(1-2\nu)} (tr \varepsilon_{ij}) + 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}^d = K (tr \varepsilon_{ij}) + 2 G \varepsilon_{ij}^d \quad (8.4)$$

Zusammen mit dem thermisch linearen Expansionskoeffizienten α , ergeben sich drei Größen, welche in den strukturmechanischen Ansatz eingehen.

$$E, \nu, \alpha \quad (8.5)$$

Wegen der deviatorischen Form der Materialgesetze im hydro-mechanischen Modell, ist anstatt des Elastizitätsmoduls der Schubmodul G im Hookeschen Modell einzusetzen. Eine Querkontraktionszahl existiert nicht. Es gilt für den Elastizitätsmodul des hydro-mechanischen Modells E^d :

$$E^d = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.6)$$

Damit in beiden Modellen die gleiche Kompressibilität wirkt, kann mit Hilfe des Kompressionsmoduls K die Kompressibilität κ bestimmt werden. Es gilt:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \quad (8.7)$$

Die Kompressibilität geht in die Berechnung der Dichte ein, indem mit dieser und dem wirkenden Druck eine druckbedingte korrigierte thermodynamische Dichte bestimmt werden kann, Vergleich Gleichung (4.34).

$$\rho^{th} = \rho_0^{th} \cdot e^{\kappa \cdot \Delta P} \quad (8.8)$$

Somit gehen auch in das hydro-mechanische Modell drei wesentliche Größen ein.

$$E^d, \kappa, \rho_0^{th} \quad (8.9)$$

Die Tests wurden mit einer reinen Eisenkohlenstofflegierung mit 0,34 wt% C durchgeführt. Die thermo-physikalischen Daten sind mit dem im **Anhang D** aufgeführten Daten bestimmt worden. Für ABAQUS ist die Dichte in einen linear thermischen Expansionskoeffizienten α umgerechnet worden. Die spezifische Wärmekapazität cp ist aus der Enthalpie numerisch abgeleitet worden. Es ist einphasig gerechnet worden, wobei für beide Modelle der Elastizitätsmodul nach der Formel von Schwerdtfeger [HS96] für Austenit berechnet worden ist.

Die Bilder (8.5) bis (8.10) zeigen die Ergebnisse des Vergleichs. Die Ergebnisse zeigen den Zustand nach $t = 25$ [s] für unterschiedliche Querkontraktionszahlen. Bei allen Spannungsverläufen ist anzumerken, dass entgegen der Konvention positive Spannungen Druckspannungen darstellen. Es ist zu erkennen, dass die Ergebnisse beider Modelle weitgehende übereinstimmen. Die druckabhängige Dichteformulierung sowie das Spannungsmodell des hydro-mechanischen Modells erzeugen für den rein elastischen Fall das gleiche Spannungs- und Dehnungsbild wie das strukturmechanische Modell.

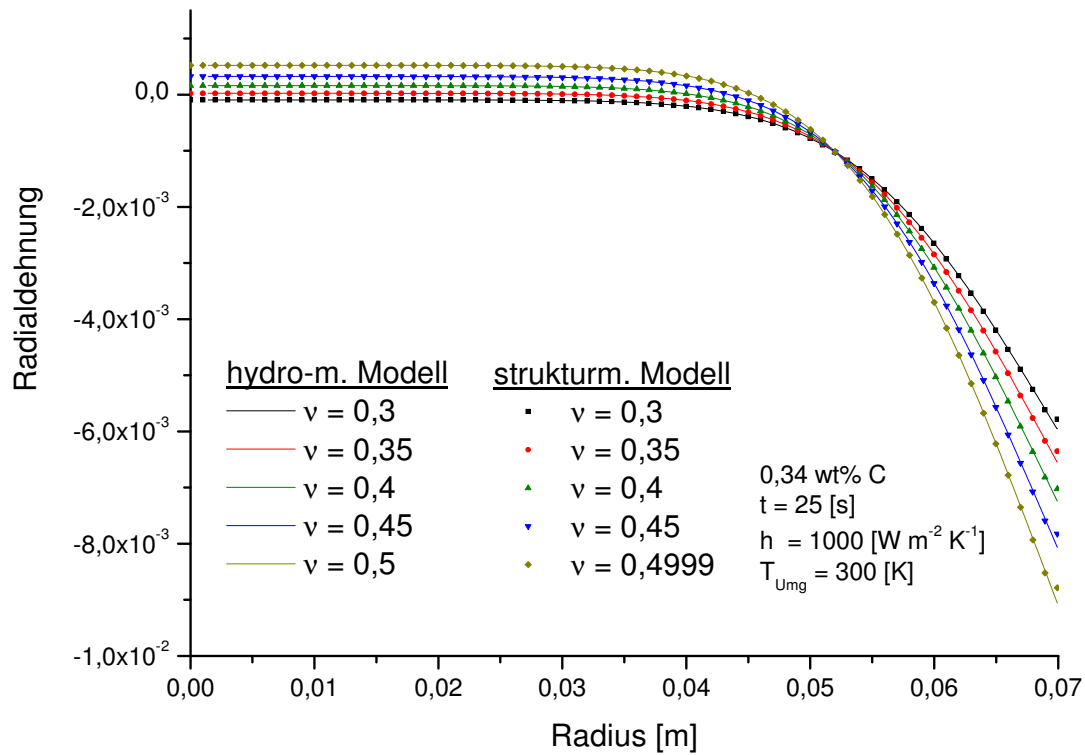


Abbildung 8.5: Radialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

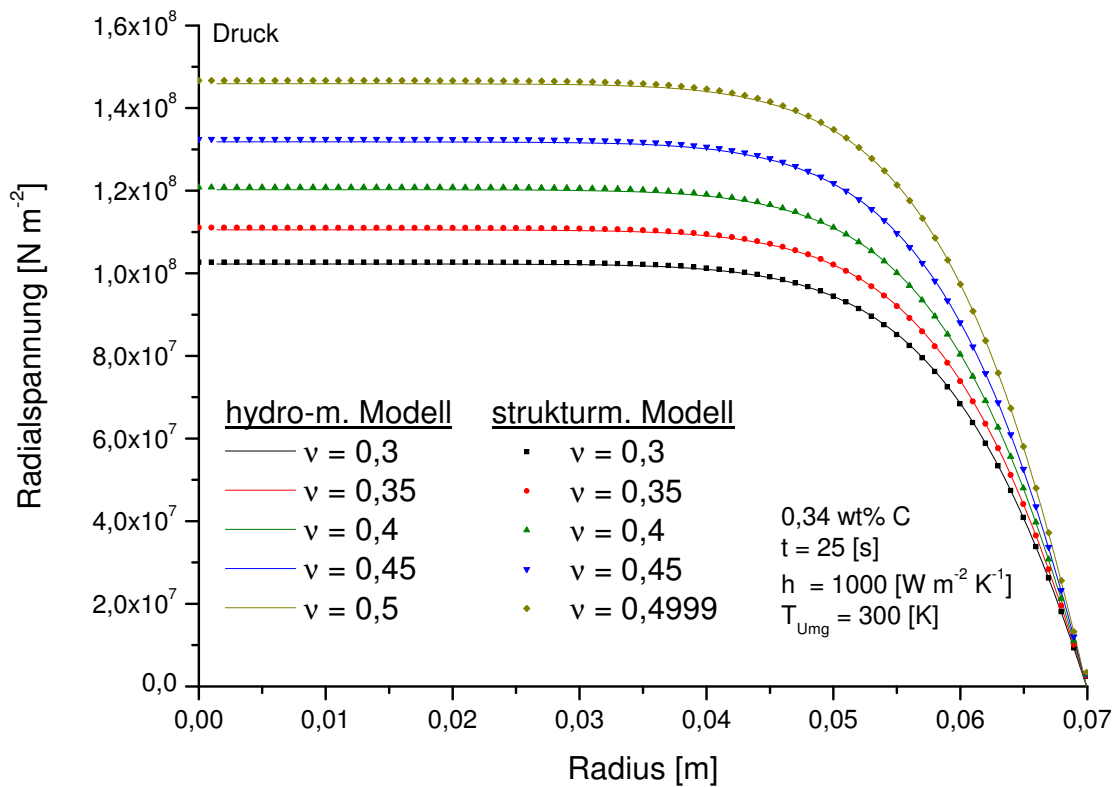


Abbildung 8.6: Radialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

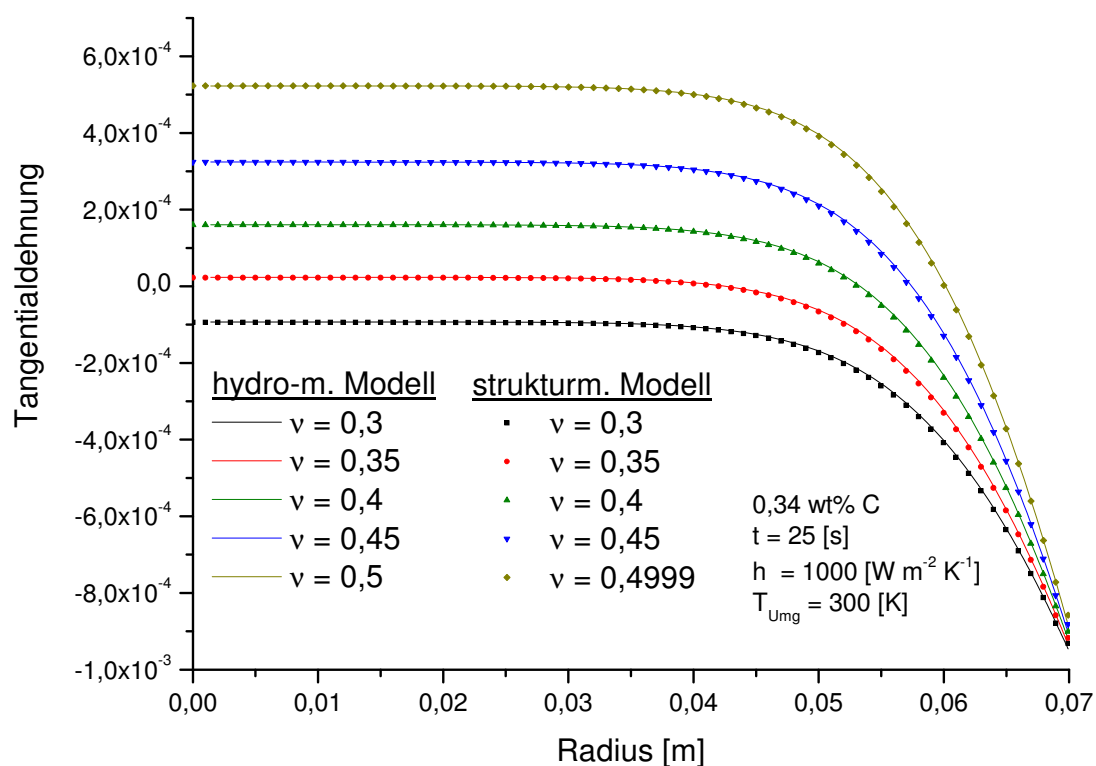


Abbildung 8.7: Tangentialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

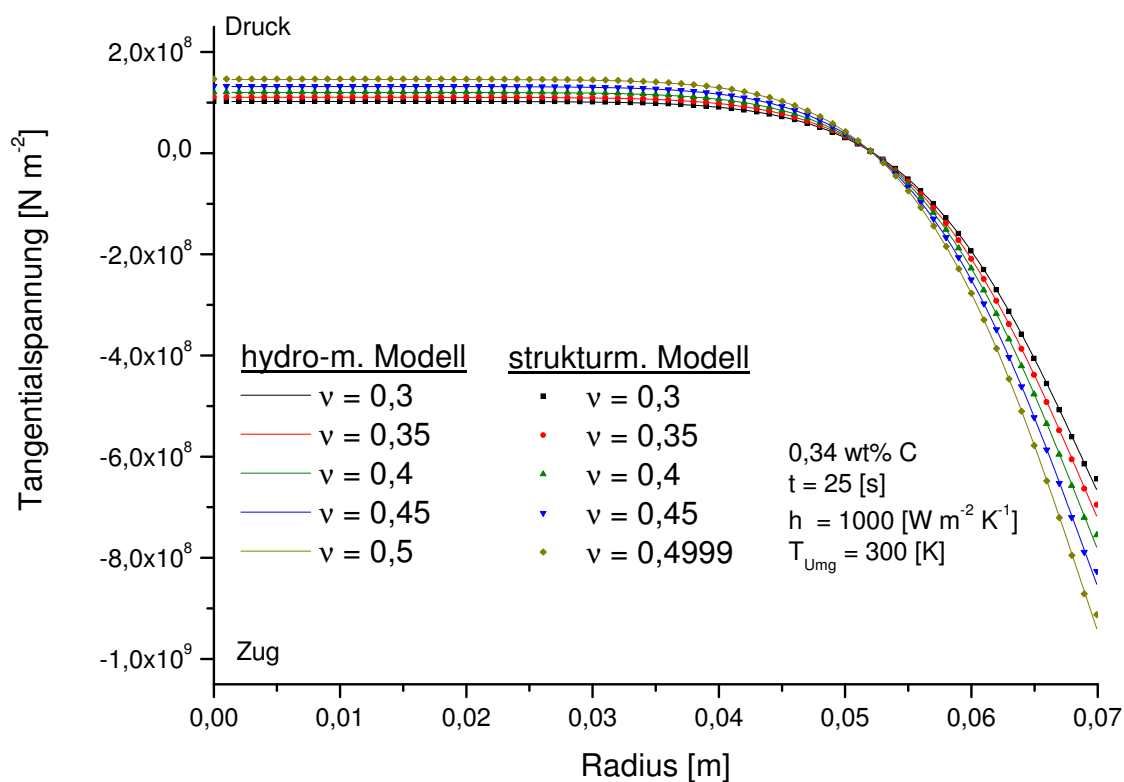


Abbildung 8.8: Tangentialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

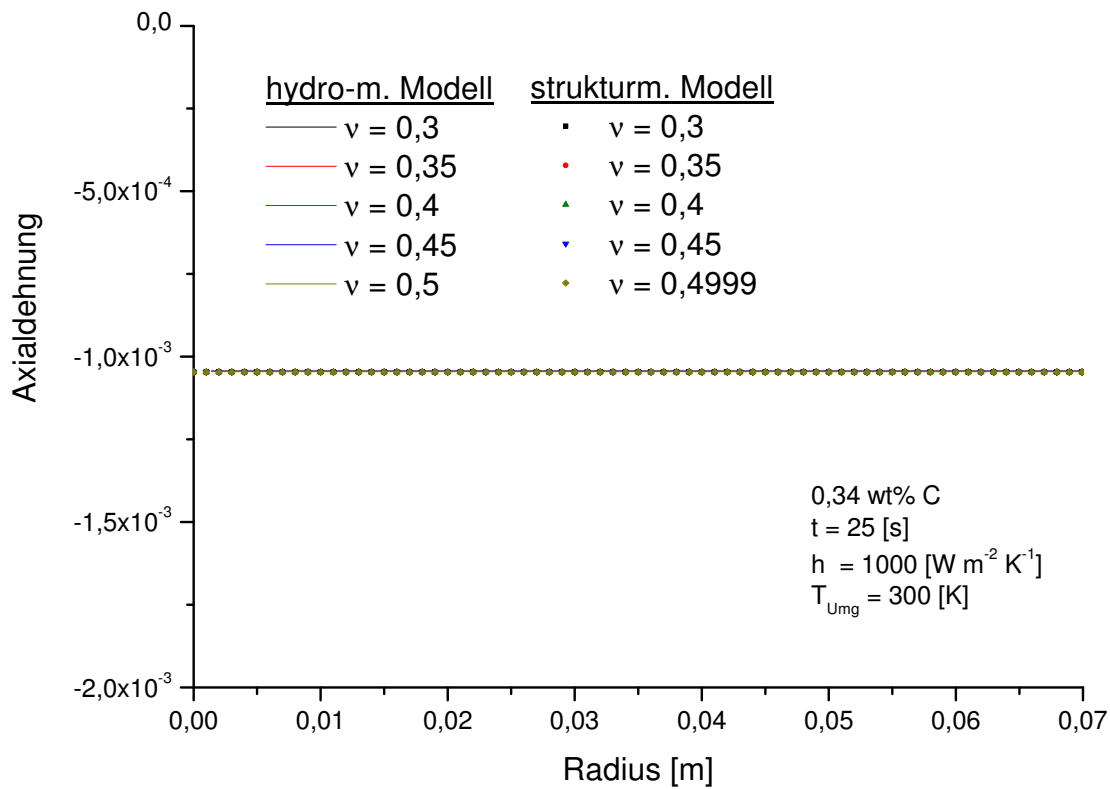


Abbildung 8.9: Axialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

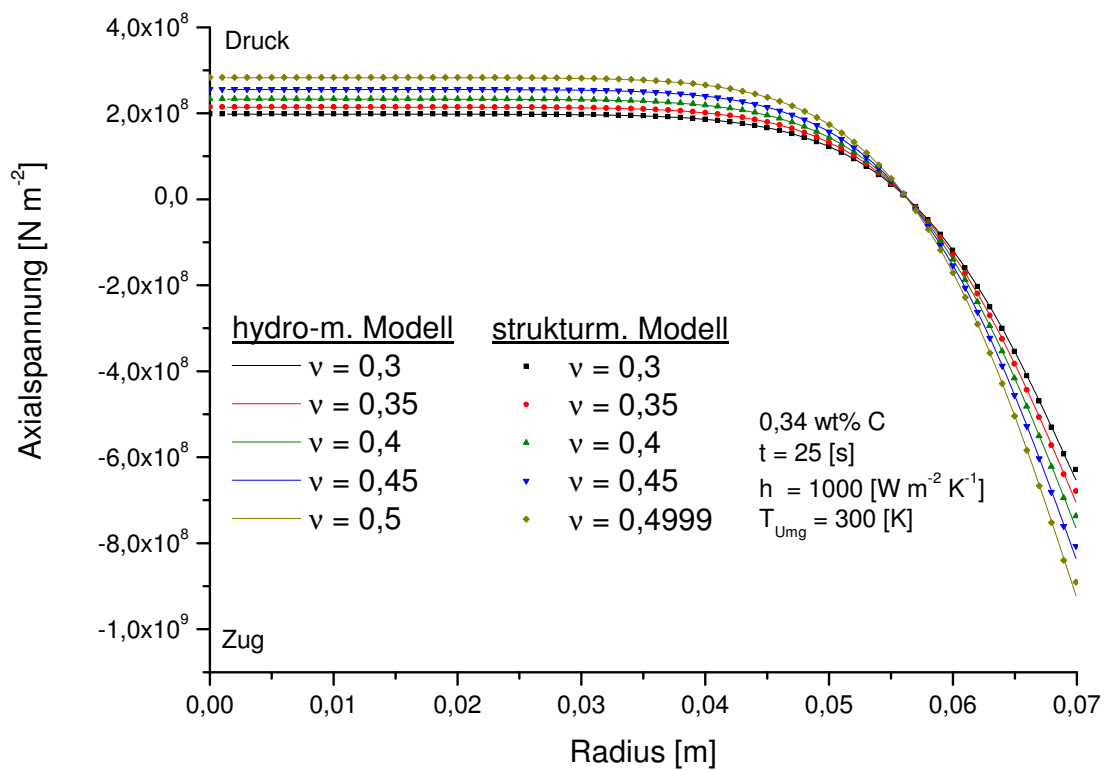


Abbildung 8.10: Axialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten

Variable	Wert	Einheit
λ	33	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
c_p	661	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
E	40	GN m^{-2}
ν	0,3	
α	konstant	K^{-1}
$T_{\text{Ref}} = T_S$	1758,15	K
$\rho(T_{\text{Ref}})$	7500	kg m^{-3}

Tabelle 8.2: Parameter der Vergleichsrechnung

T [K]	$\alpha [\text{K}^{-1}]$
1500	$0,685964 \cdot 10^{-4}$
1550	$0,779225 \cdot 10^{-4}$
1600	$0,918586 \cdot 10^{-4}$
1650	$1,149770 \cdot 10^{-4}$
1700	$1,608780 \cdot 10^{-4}$
1750	$2,741760 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 8.3: α für 0,1 wt% C

Alle Rechnungen sind Abkühlungsrechnungen, die mit einer homogen verteilten Anfangstemperatur von $T = 1600$ [K] starten. Es wird konstant Wärme abgeführt, mit konstantem Wärmeübergangskoeffizient $h = 1000$ [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$] und mit konstanter Umgebungstemperatur $T = 1400$ [K]. Für die Rechnungen sind nicht die Temperatureckdaten wichtig, sondern dass in einem Temperaturintervall viel Wärme abgeführt wird. Die Rechnungen enden, wenn die Geometrie vollständig auf Umgebungstemperatur abgekühlt und zudem spannungsfrei ist. Das Materialverhalten ist daher elastisch-viskos, sodass sich die Spannungen durch Relaxation abbauen können. Die Ergebnisse für das strukturmechanische Modell sind mit dem FEM-Programm ABAQUS mit der im **Anhang E** beschriebenen zweidimensionalen Scheibe erhalten worden.

8.3.1 Massenbilanz: konstante Viskosität

Es sind zunächst Rechnungen mit einer konstanten Viskosität von $\mu = 10^{11}$ [s N m^{-2}] durchgeführt worden. Da die Rechnungen bis zum vollständigen Erreichen der Umgebungstemperatur und bis zur Spannungsfreiheit ablaufen, kann am Ende gefordert werden, dass die thermodynamische Dichte des Materials $\rho^{th}(1400)$ in der Geometrie vorliegen muss. Für das strukturmechanische Modell ist von Interesse, in wie weit sich mit dem aus der Dichte abgeleiteten thermischen Ausdehnungskoeffizient und der mit der Dichte korrespondierenden Querkontraktion auch die betreffende Dichte einstellt. Für thermomechanische Spannungen während der Erstarrung ist dies von besonderer Bedeutung, da der Dichteverlauf die Dehnungen und Spannungen bestimmt. Wird dieser nicht korrekt wiedergegeben, sind auch keine korrekten Spannungen zu erwarten. Die tatsächlich am Ende im Block vorliegende Dichte lässt sich aus dem vorliegenden Volumen V und der Ausgangsmasse m_0 berechnen. Gilt eine fiktive Ausgangshöhe von zum Beispiel $h_0 = 0,21$ [m], kann mit dieser und der Axialdehnung ε_{zz} zu jedem Zeitpunkt die aktuelle Höhe h ausgerechnet werden. Damit auch das Volumen, da die Radialverschiebungen bekannt sind.

$$h = h_0 + (\varepsilon_{zz} \cdot h_0) \quad (8.10)$$

$$V = \pi r^2 h \quad (8.11)$$

Die Ausgangsmasse ergibt sich aus dem Ausgangsvolumen V_0 und der thermodynamischen Dichte zu Beginn der Rechnung $\rho^{th}(1600)$. Mit der Forderung, dass die Masse erhalten bleibt, $m(1600) = m(1400)$, lässt sich die vorliegende Dichte $\rho(1400)$ ausrechnen und mit der thermodynamischen Dichte $\rho^{th}(1400)$ vergleichen.

$$\frac{\rho(1400) - \rho^{th}(1400)}{\rho^{th}(1400)} \cdot 100 \quad (8.12)$$

Die Ergebnisse des Vergleichs zeigt Abbildung (8.12). Die Forderung der Dichtetreue ist beim hydro-mechanischen Modell prinzipbedingt stets zu 100% erfüllt. Die Ergebnisse des strukturemechanischen Modells zeigen dagegen eine Abhängigkeit der relativen Dichteabweichung vom Expansionskoeffizienten. Die relative Dichteabweichung nimmt mit größerwerdenden Expansionskoeffizienten exponentiell zu und erreicht Werte von ca. 1%. Sehr kleine Expansionskoeffizienten erfüllen dagegen die Forderung, dass die am Ende vorliegende Dichte gleich der thermodynamischen beziehungsweise der vorgegebenen Dichte ist. Der in den Erstarrungsmodellen gewählte Ansatz der additiven Zerlegung der Dehnungen in mechanische und thermische Anteile, führt demnach bei großen Dichteänderungen, wie sie bei Stahl im Hochtemperaturbereich auftreten, zu nicht dichtekonsistenten Volumenänderungen. Inwieweit diese den Spannungs- und Dehnungszustand der Geometrie beeinflussen wird nachfolgend untersucht.

Die Abbildung (8.13) vergleicht das Schrumpfungsverhalten beider Modelle miteinander. Es ist zu erkennen, dass nur für die zwei größten Expansionskoeffizienten ein Unterschied im Schrumpfungsverhalten sichtbar ist. Dabei schrumpft die Geometrie nach dem strukturemechanischen Modell zunächst stärker, jedoch im weiteren Verlauf der Rechnung schwächer als die Geometrie nach dem hydro-mechanischen Modell. Trotz des nicht massenkonsistenten Endzustands sind in Summe keine großen Abweichungen im Schrumpfungsverhalten erkennbar.

Die Diagramme (8.14) und (8.15) zeigen, sortiert nach kleineren und größeren Expansionskoeffizienten, den Druckverlauf nach 100 Sekunden. Wie aus den Schrumpfungsverläufen zu erwarten ist, zeigen die Druckverläufe der beiden Modelle bei großen Expansionskoeffizienten deutliche Abweichungen voneinander. Der Druck am äußeren Rand ist im hydro-mechanischen Modell geringer und am inneren Rand höher als der im strukturemechanischen Modell. Außerdem liegt der Tiefpunkt der Druckverläufe in der Mitte der Geometrie an der anderen Stelle. Anders als es nach den Schrumpfungskurven den Anschein erweckt, weichen auch die Druckverläufe der mittleren Expansionskoeffizienten sichtbar voneinander ab, wenn auch nicht in so einem starken Maße. Das gilt auch für die Druckverläufe der kleinen Expansionskoeffizienten und sogar für den kleinsten. Das ist zunächst erstaunlich, da für diesen am Ende die Rechnung massenkonsistent ausweist und keine sichtbaren Abweichungen im Schrumpfungsverhalten existieren.

Die Abweichung im Druckverlauf von $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4} [\text{K}^{-1}]$ ist erklärbar, wenn die Entwicklung der Dichte im Verlauf des Abkühlvorgangs betrachtet wird. Eine mittlere Dichte $\bar{\rho}$ des Blocks lässt sich zu jedem Zeitpunkt aus der Ausgangsmasse m_0 und dem aktuellen Volumen V ausrechnen. Mit der Annahme, dass die mittlere Dichte des Blocks aus dem hydro-mechanischen Modell stets gleich der vorgegebenen (thermodynamischen) Dichte ist, kann eine Dichteabweichung ausgerechnet werden. Diese Annahme wird durch das Diagramm (8.17) bestätigt, indem für verschiedene Zeiten die vorgegebene (thermodynamische) Dichte ρ^{th} mit der im hydro-mechanischen Modell berechneten Dichte ρ verglichen wird. Das Diagramm (8.16) zeigt schließlich die berechnete Dichteabweichung für den Expansionskoeffizienten von $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4} [\text{K}^{-1}]$. Zum Vergleich zeigt das Diagramm zusätzlich noch die Dichteabweichung des größten untersuchten Expansionskoeffizienten. Die beiden Kurven unterscheiden sich nur ihrer Dimensionalität, nicht aber in ihrem Verlauf voneinander. Rechnungen mit kleinem α sind daher nur scheinbar stets dichtetreu. Die Abweichungen zu der thermodynamischen Dichte sind für kleine α vernachlässigbar klein, genauso wie die Abweichungen des Schrumpfungsverhaltens und des Druckverlaufs.

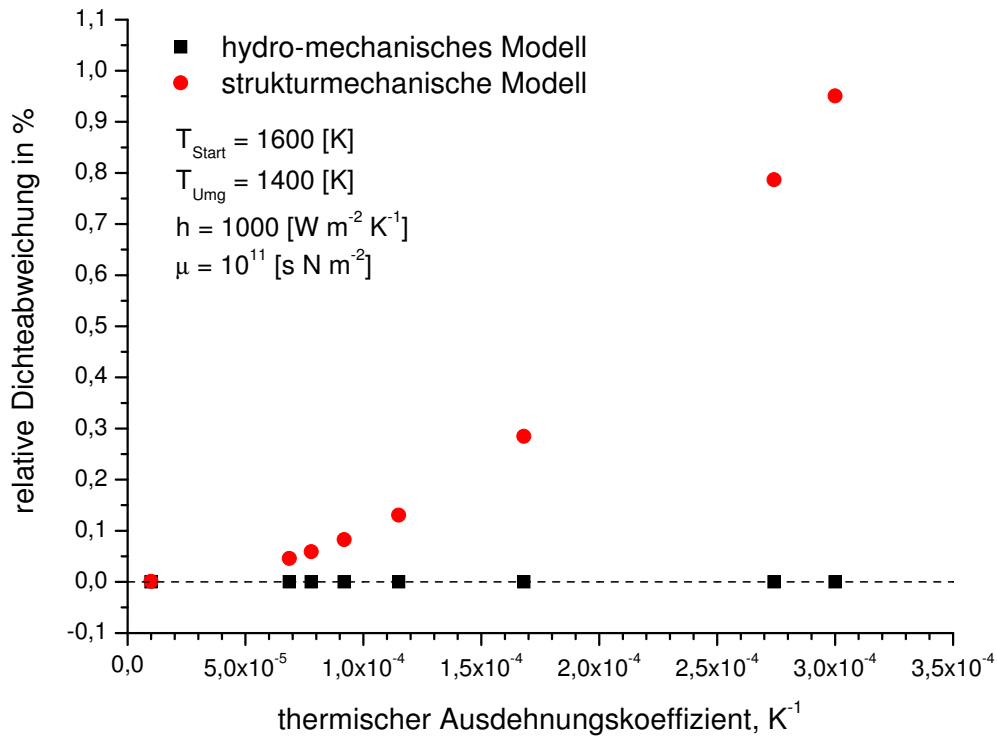


Abbildung 8.12: Relative Dichteabweichung unterschiedlicher Expansionskoeffizienten

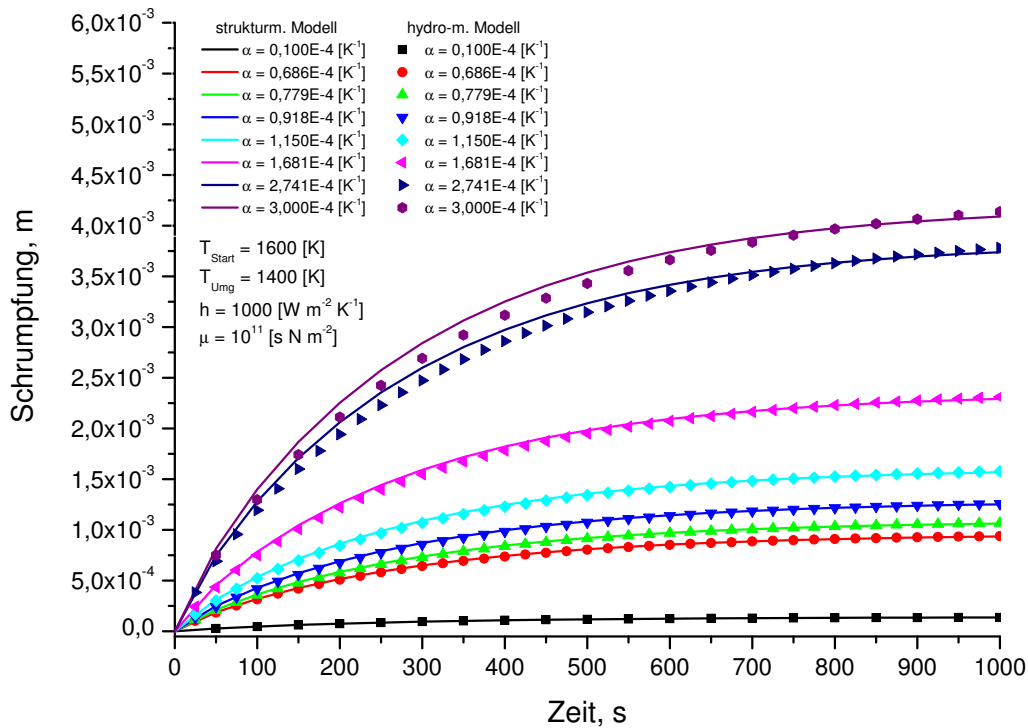


Abbildung 8.13: Schrumpfungsverhalten unterschiedlicher Expansionskoeffizienten

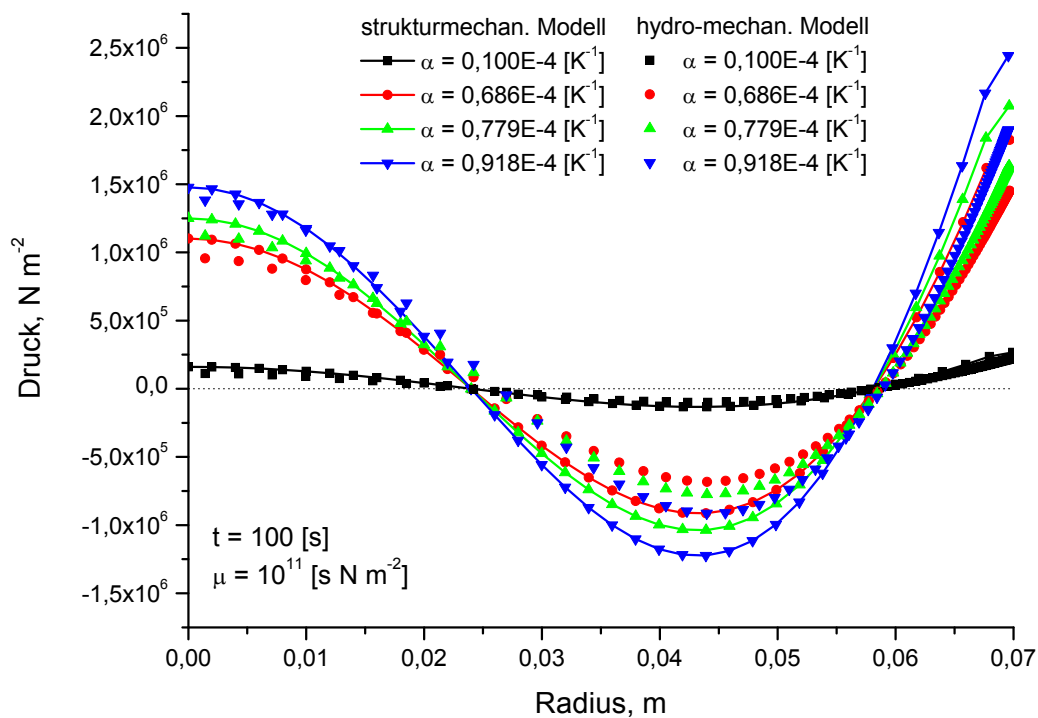


Abbildung 8.14: Druckverläufe nach 100 s für kleinere Expansionskoeffizienten

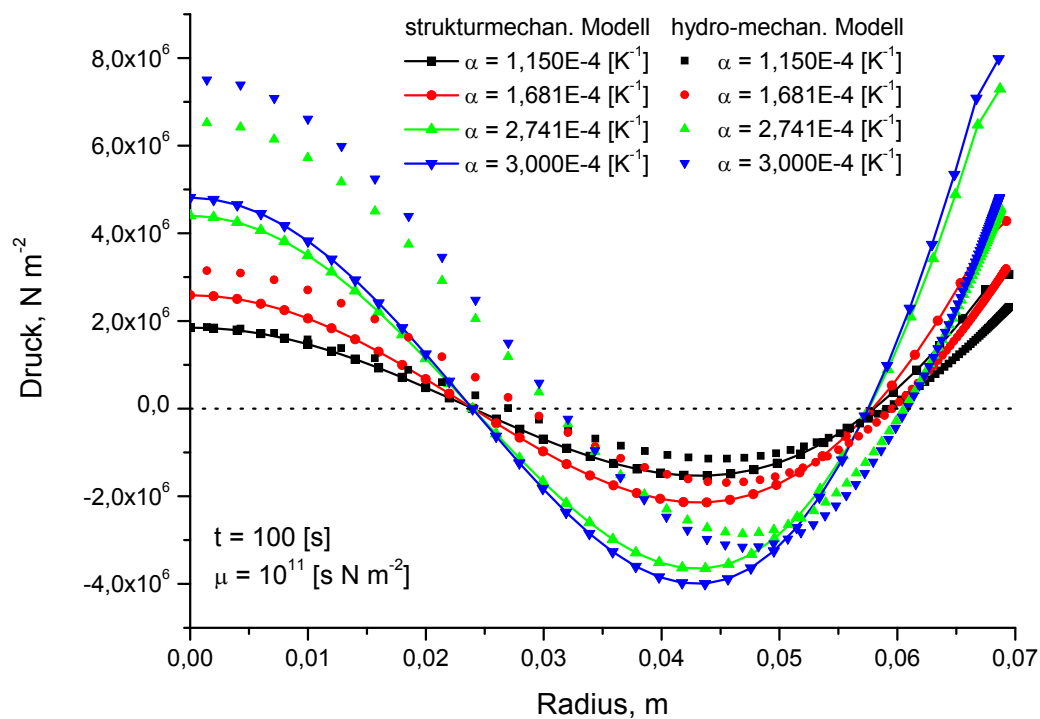


Abbildung 8.15: Druckverläufe nach 100 s für größere Expansionskoeffizienten

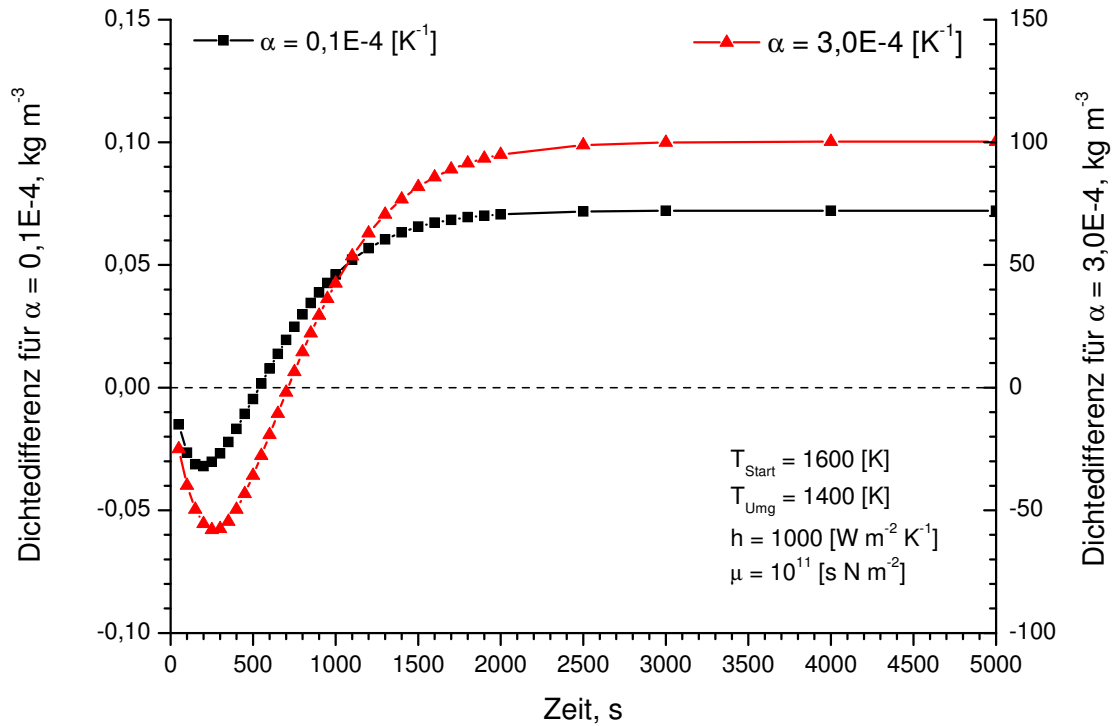


Abbildung 8.16: Absolute Dichtedifferenz für $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4}$ und $\alpha = 3,0 \cdot 10^{-4}$

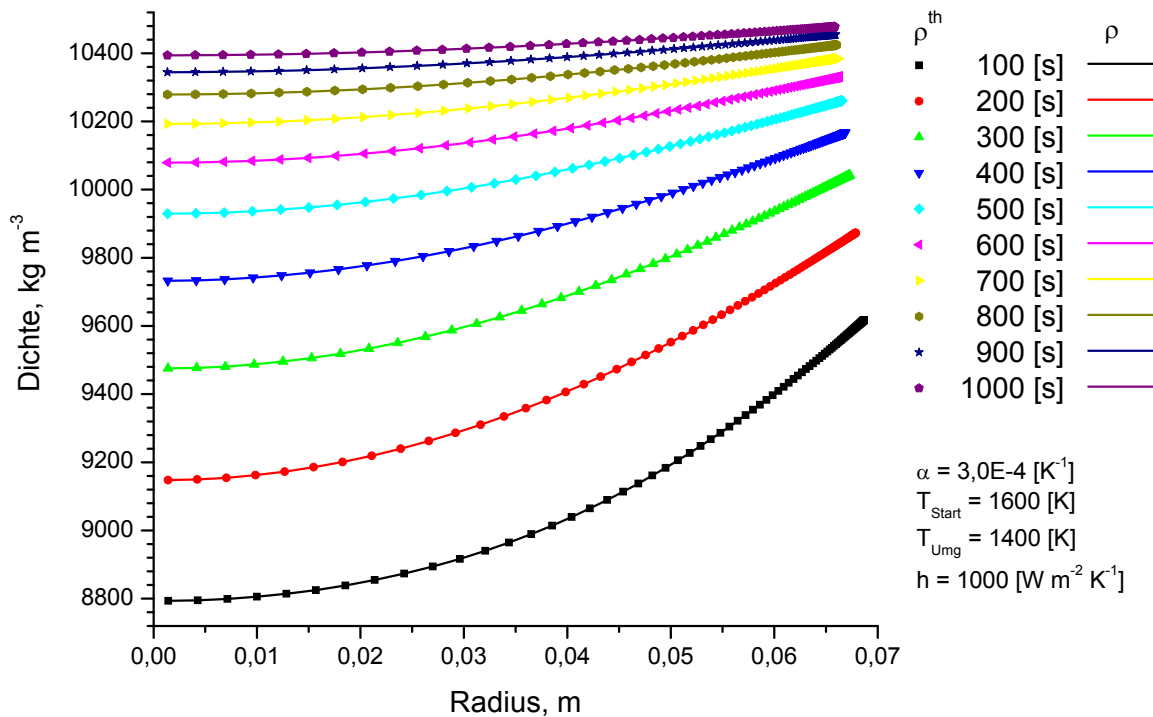


Abbildung 8.17: Dichten des hydro-mechanischen Modells

8.3.2 Massenbilanz: konstanter Expansionskoeffizient

Die Abkühlungsrechnungen mit konstanter Viskosität und unterschiedlichen Expansionskoeffizienten beantworten die Frage, wie sich unterschiedlich große Dichteänderungen auf die Massenerhaltung im strukturmechanischen Ansatz auswirken. In den anschließenden Abkühlungsrechnungen sind nun die Auswirkungen von unterschiedlichen Fließverhalten auf die Dichteerhaltung untersucht worden, indem bei konstantem Elastizitätsmodul mit verschiedenen Viskositäten gerechnet wurde. Die Dichteänderungen sind alle gleich, da ein konstanter Expansionskoeffizient von $\alpha = 1,680878 \cdot 10^{-4} [\text{K}^{-1}]$ gilt. Ansonsten gelten die Parameter aus der Tabelle (8.2).

Die Viskosität in den vorangegangenen Rechnungen betrug $\mu = 10^{11} [\text{s N m}^{-2}]$. Um das Fließverhalten für diese Viskosität abschätzen zu können, sind zunächst Rechnungen mit dem hydro-mechanischen Modell für ein sehr großes Spektrum von Viskositäten durchgeführt worden, wobei die Viskositäten im Bereich von $\mu = 10^{05} [\text{s N m}^{-2}]$ bis $\mu = 10^{16} [\text{s N m}^{-2}]$ liegen. Das Diagramm (8.18) zeigt die Schrumpfungskurven für alle untersuchten Viskositäten. Es ist aus dem Diagramm zu erkennen, dass das Schrumpfungsverhalten in allen Fällen gleich ist und nur durch die Dichteentwicklung, nicht aber durch den Elastizitätsmodul und das Kriechverhalten bestimmt wird. Das hydro-mechanische Modell rechnet an dieser Stelle genau, da das Schrumpfen eines Materials allein durch seine Dichteänderungen bestimmt ist und unabhängig vom Materialgesetz sein muss.

Das Diagramm (8.19) zeigt die Radialspannung der unterschiedlichen Materialfunktionen betragsmäßig und in logarithmischer Auftragung. Aus dem Diagramm ist der extreme Unterschied in der Größenordnung der Spannungen für die einzelnen Viskositäten zu erkennen. Während eine Viskosität von $\mu = 10^{05} [\text{s N m}^{-2}]$ Radialspannungen im zweistelligen Bereich generiert, liegen die Radialspannungen bei einer Viskosität von $\mu = 10^{14} [\text{s N m}^{-2}]$ bei $\sigma_{rr} = -10^8 [\text{N m}^{-2}]$. Für Viskositäten größer $\mu = 10^{13} [\text{s N m}^{-2}]$ steigen die Spannungsverläufe nicht weiter an. Das Material ist bei solchen hohen Viskositäten so zäh, dass kein Fließen mehr eintritt und sich nahezu elastisch verhält.

Mit dem Programm ABAQUS sind die Abkühlungsrechnungen mit den gleichen Materialfunktionen wiederholt worden. Das Spektrum der Viskosität ist aber gegenüber den Abkühlungsrechnungen des hydro-mechanischen Modells wesentlich geringer. Zum einen sind Rechnungen mit Viskositäten von $\mu > 10^{14} [\text{s N m}^{-2}]$ nicht mehr notwendig, da kein Fließen mehr eintritt und sich das Material elastisch verhält. Zum anderen sind Rechnungen mit Viskositäten von $\mu < 10^{09} [\text{s N m}^{-2}]$ grenzwertig, da die Gefahr besteht den Bereich der geometrischen Linearität zu verlassen.

Das Diagramm (8.20) vergleicht das absolute Schrumpfungsverhalten beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten. Während es bei dem hydro-mechanischen Modell einen homogenen Schrumpfungsverlauf gibt, sind Abweichungen von diesem Verlauf beim strukturmechanischen Modell zu erkennen. Es ist deutlich sichtbar, dass am Ende der Rechnungen die Schrumpfungsverläufe des strukturmechanischen Modells unter denen des hydro-mechanischen liegen. Um Abschätzen zu können, inwieweit die Schrumpfungsverhalten voneinander abweichen, ist die Differenz zwischen den Schrumpfungsverhalten beider Modelle der jeweiligen Viskosität gebildet worden.

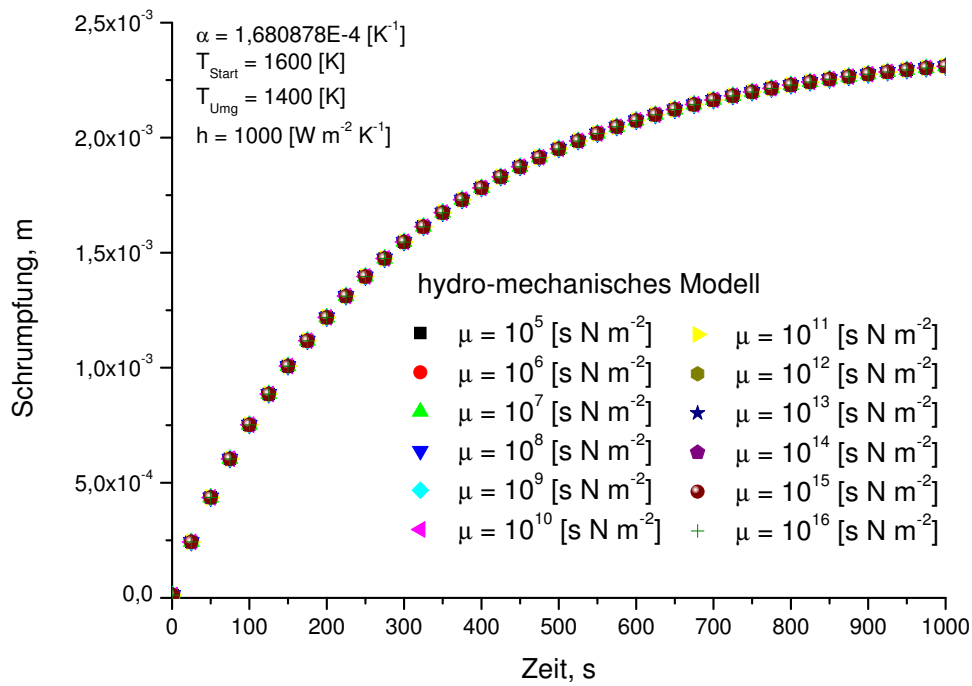


Abbildung 8.18: Schrumpfungsverläufe des hydro-mechanischen Modells für unterschiedliche Viskositäten

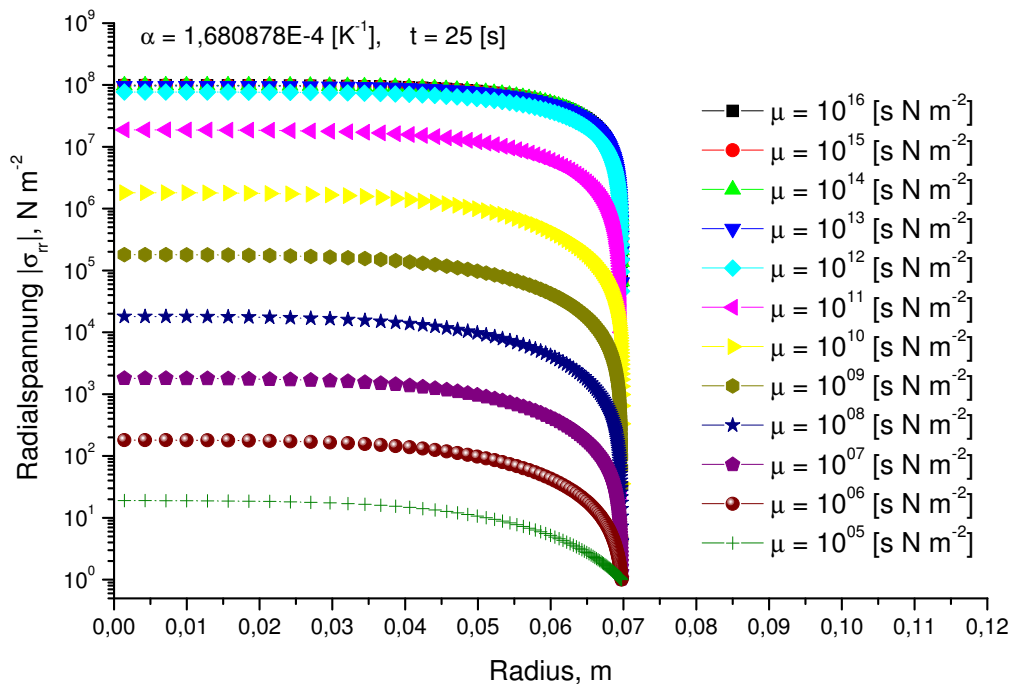


Abbildung 8.19: Radialspannungsverläufe des hydro-mechanischen Modells für unterschiedliche Viskositäten

Das Diagramm (8.21) zeigt die Differenz der Schrumpfung beider Modelle, wobei davon ausgegangen worden ist, dass das hydro-mechanische Modell den Idealverlauf vorgibt und somit die Referenzgröße ist. Alle Schrumpfungsabweichungen des strukturmechanischen Modells zeigen im Prinzip den gleichen Verlauf. Im strukturmechanischen Modell ist die Schrumpfung zunächst größer, was einer negativen Abweichung entspricht. Im weiteren Verlauf der Rechnung wechselt die Abweichung das Vorzeichen und ist am Ende unabhängig vom Materialgesetz für alle Verläufe gleich und geringer als die Schrumpfung des hydro-mechanischen Modells. Die Abweichungen sind aber bis zum Erreichen der Endabweichung, trotz des prinzipiellen gleichen Verlaufs, unterschiedlich groß. Die Kurven nah am elastischen Bereich zeigen betragsmäßig die geringste Abweichung und sind nahezu gleich. Die Materialien mit niedrigen Viskositäten sind ebenfalls sehr ähnlich und zeigen die größte betragsmäßige Abweichung. Sie erreichen erst später die allen gemeinsame Endabweichung.

Die Schrumpfung zeigt die radialen Abweichungen auf. Um eine Aussage über die axialen Bewegungen machen zu können sind die Axialdehnungen ε_{zz} im Diagramm (8.22) aufgetragen. In analoger Weise zur Schrumpfung sind auch für die Axialdehnungen die Abweichungen des strukturmechanischen Modells in Bezug zum hydro-mechanischen Modell ausgerechnet worden, Diagramm (8.23). Für die Axialdehnungen ergibt sich das gleiche Bild, wie für die Schrumpfungen. Betragsmäßig liegen die Axialdehnungen nach dem strukturmechanischem Modell unterhalb der des hydro-mechanischen Modells. Wieder zeigen alle Abweichungen den gleichen prinzipiellen Verlauf und laufen zum Ende hin zusammen. Auch bei den Axialdehnungen fallen wieder die zwei Gruppen der Abweichungsverläufe auf, nämlich die der hochviskosen und die der niedrigviskosen Kurven.

Um die Abweichungen in der radialen und axialen Bewegung in Hinsicht auf die Massenerhaltung richtig zu bewerten, kann die mittlere Dichte des Blocks $\bar{\rho}$ ausgerechnet werden. Den Vergleich der mittleren Dichte des Blocks zeigen die Diagramme (8.24) und (8.25). Wie aus den Verläufen der radialen und axialen Abweichungen zu erwarten war, zeigen die mittlere Dichte und die Abweichung der mittleren Dichte die analogen Verläufe.

Aus allen Diagrammen ist zu erkennen, dass die absoluten Verläufe der Schrumpfung, der Axialdehnung und der mittleren Dichte beider Modelle für alle getesteten Viskositäten sehr ähnlich sind. Die Abweichung sind zwar gerade zum Ende der Rechnung hin sichtbar, aber nicht groß. Die Abweichungskurven aller drei Größen zeigen den gleichen Verlauf. In Bezug auf die Massenerhaltung kann gesagt werden, dass die Masseninkonsistenz des strukturmechanischen Ansatzes in der Größenordnung vom Materialverhalten abhängt. Es existiert aber kein Materialverhalten was massenkonsistent den Abkühlvorgang beschreibt. Zudem gibt es im strukturmechanischen Modell eine Abhängigkeit des Schrumpfungsverhalten vom Materialgesetz.

Die Auswirkungen auf den Spannungszustand zeigen die Diagramme (8.26) bis (8.29). Trotz der dargestellten Abweichungen zwischen strukturmechanischem und hydro-mechanischem Modell, ist für hochviskose Materialien in den Spannungsverläufen und im Druckverlauf kein Unterschied zu sehen. Erst bei weicheren Materialien sind deutliche Unterschiede in den Verläufen zu sehen. Ab einer Viskosität von $\mu = 10^{11}$ [s N m⁻²] bleiben die Abweichungen für weichere Materialien bezogen auf die jeweilige Größenordnung gleich groß.

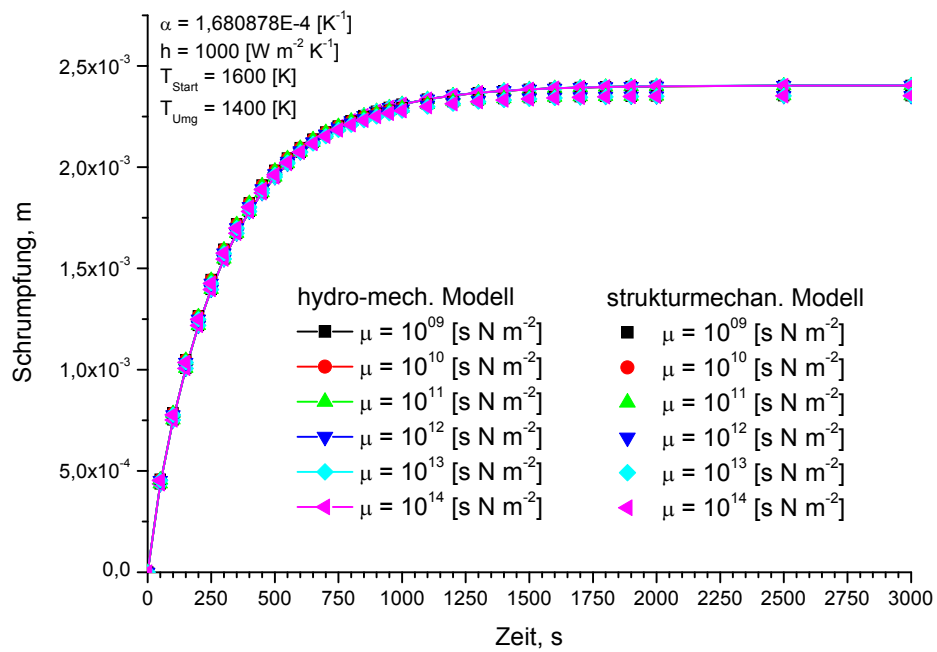


Abbildung 8.20: Vergleich des Schrumpfungsverhalten beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

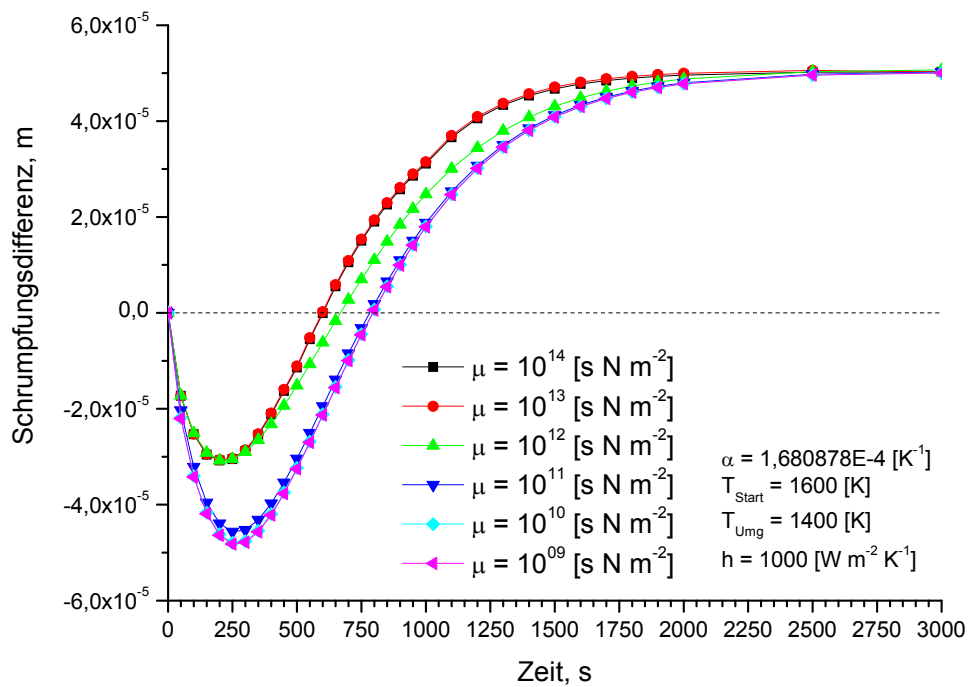


Abbildung 8.21: Schrumpfungsdifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten

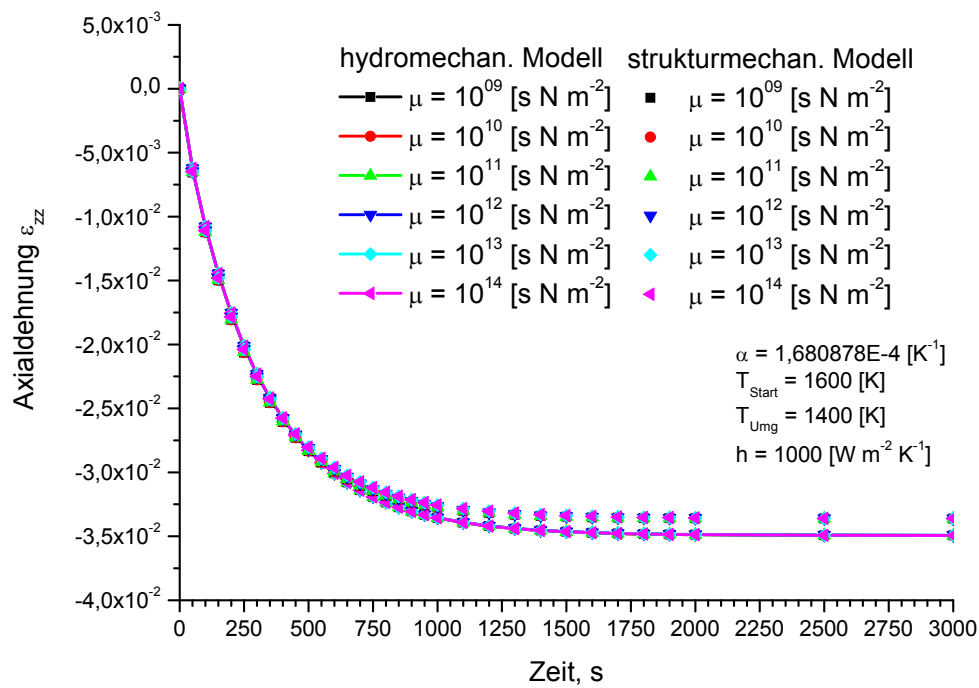


Abbildung 8.22: Vergleich der Axialdehnung beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

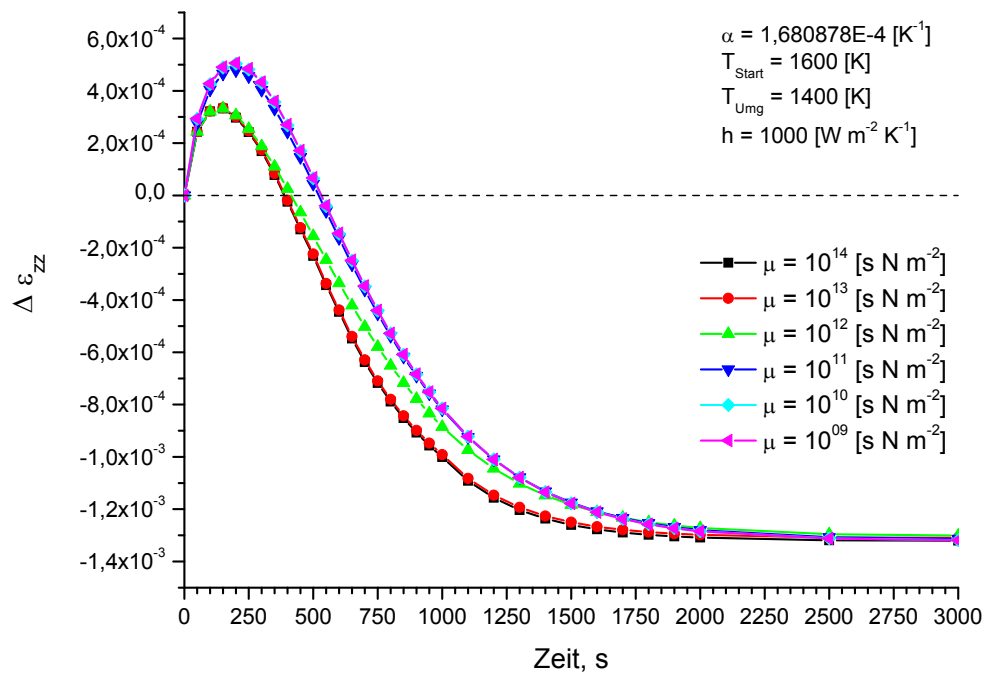


Abbildung 8.23: Axialdehnungsdifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten

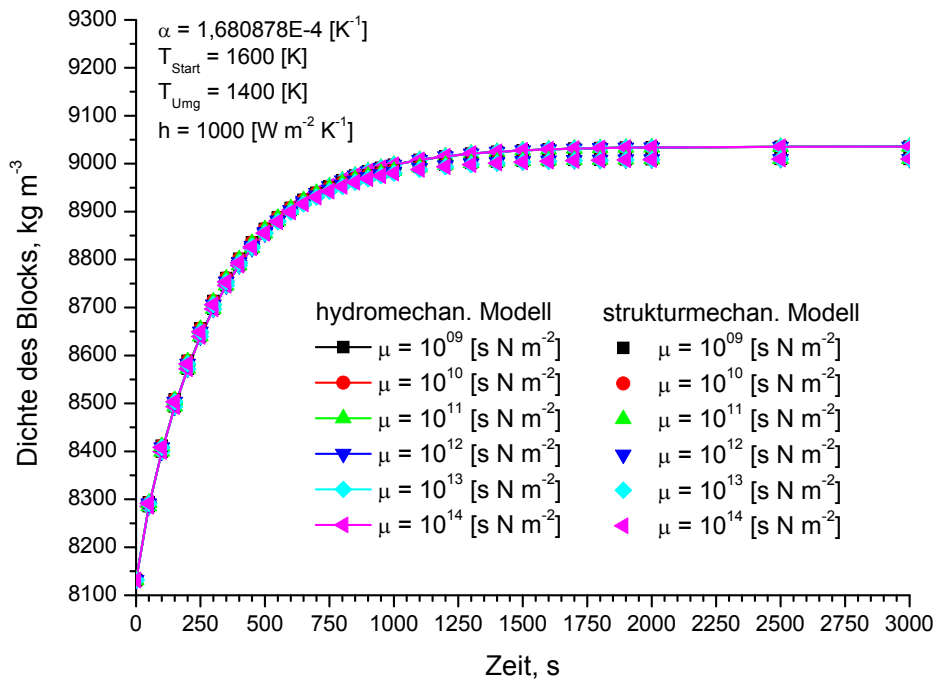


Abbildung 8.24: Vergleich der Blockdichten beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

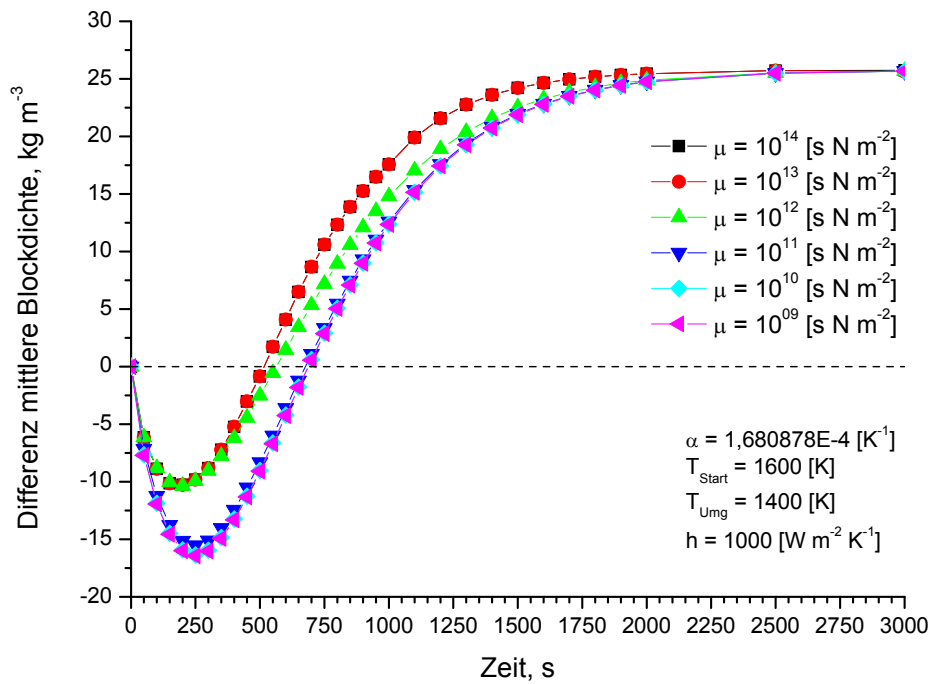


Abbildung 8.25: Blockdichtendifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten

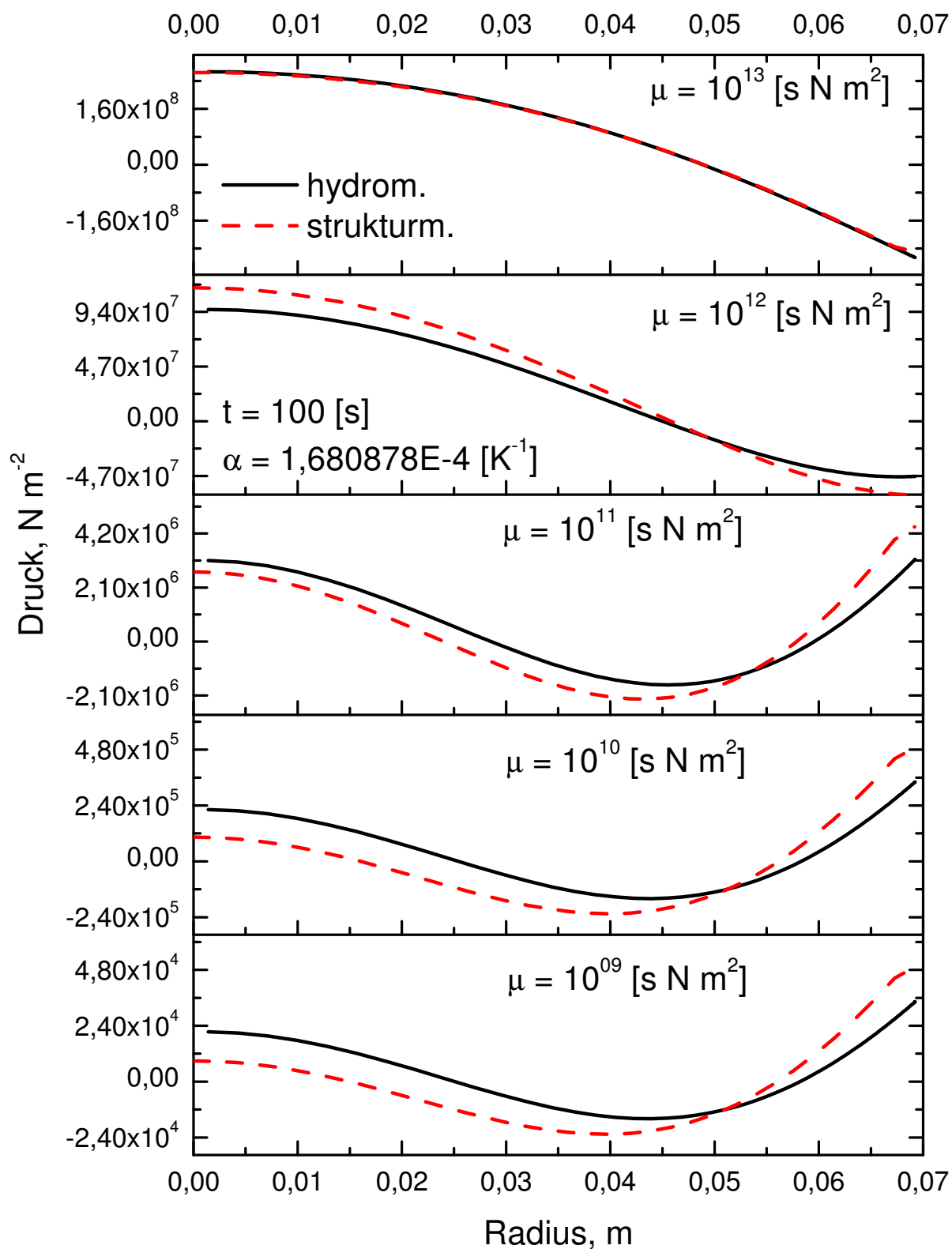


Abbildung 8.26: Druckverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

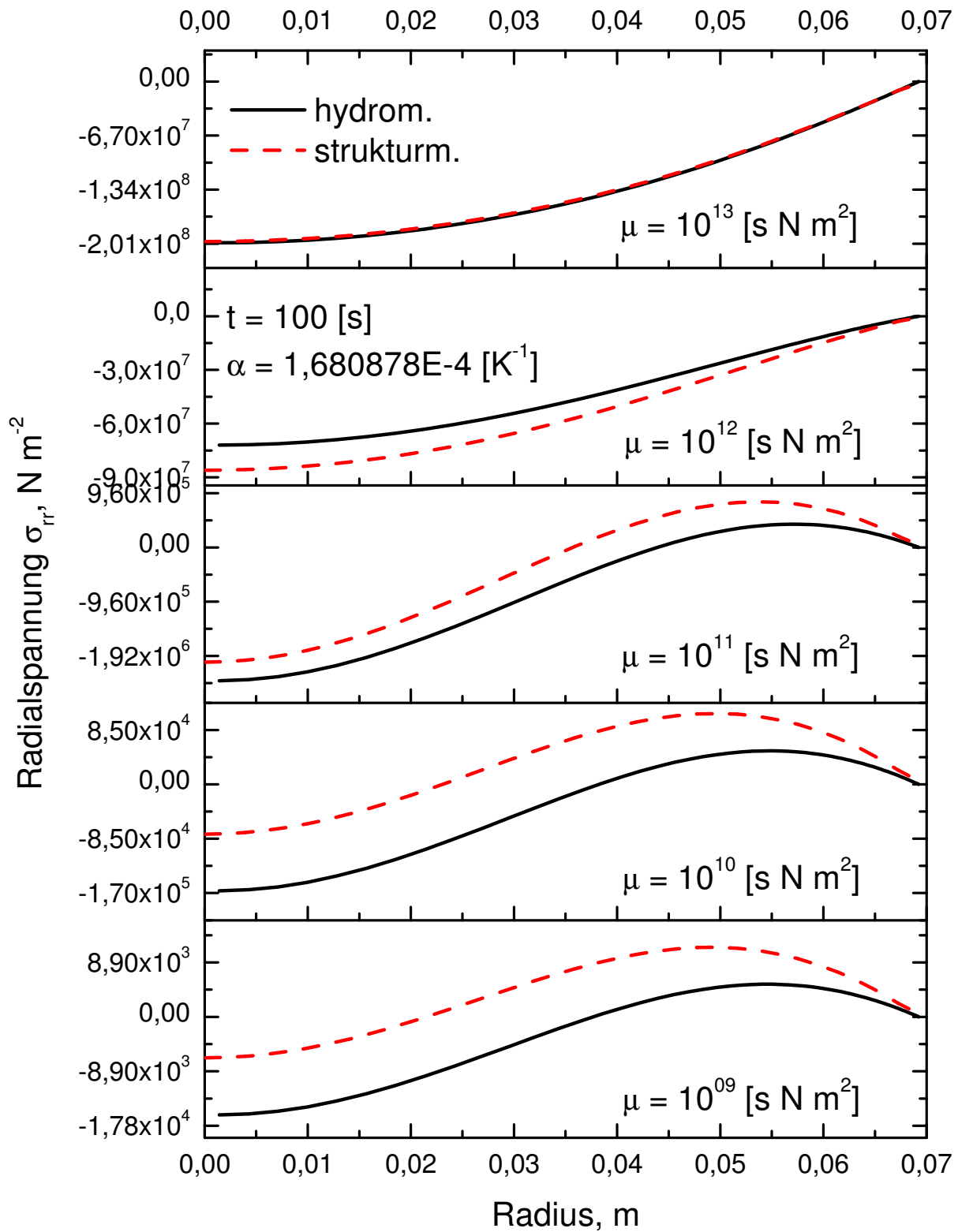


Abbildung 8.27: Radialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

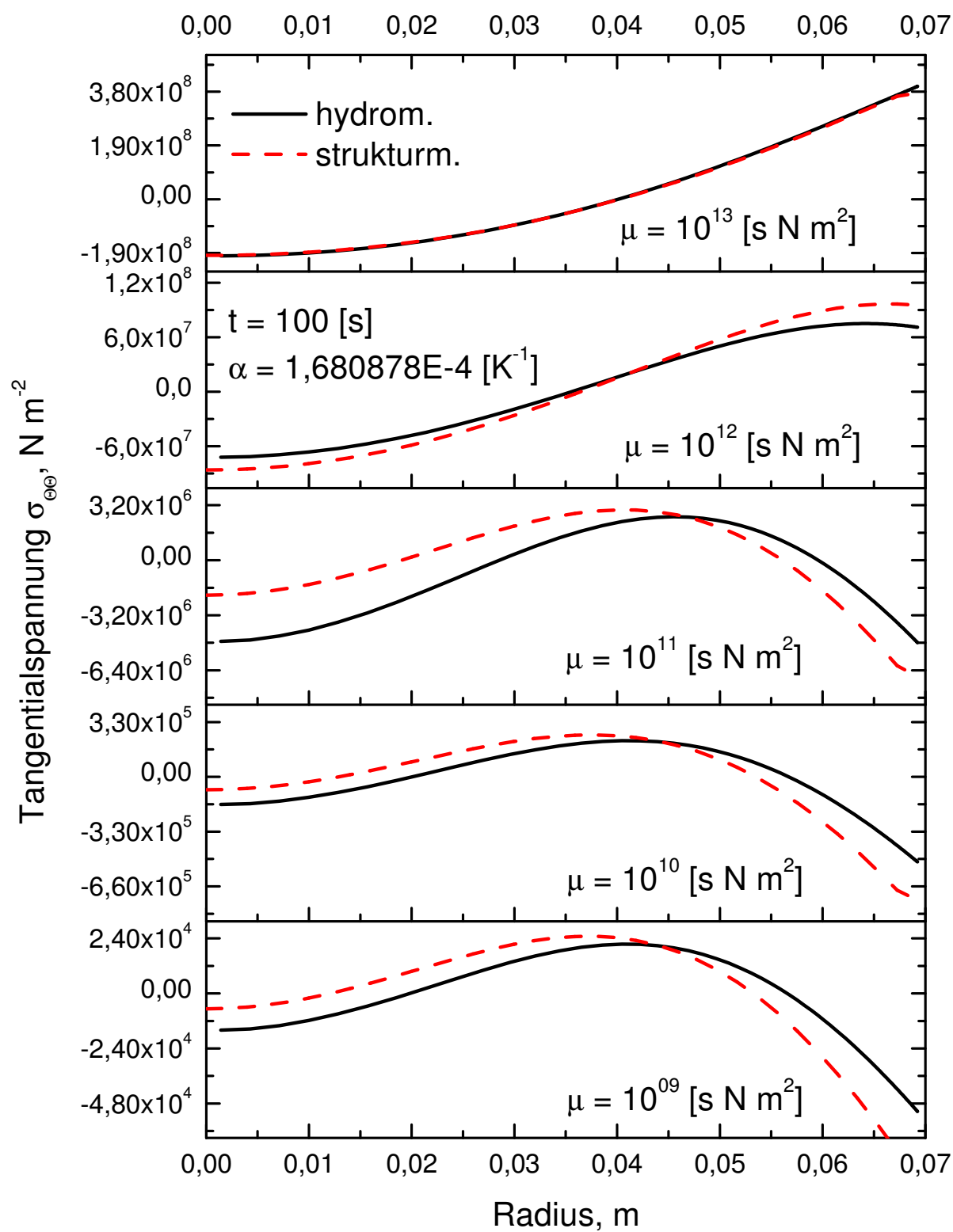


Abbildung 8.28: Tangentialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

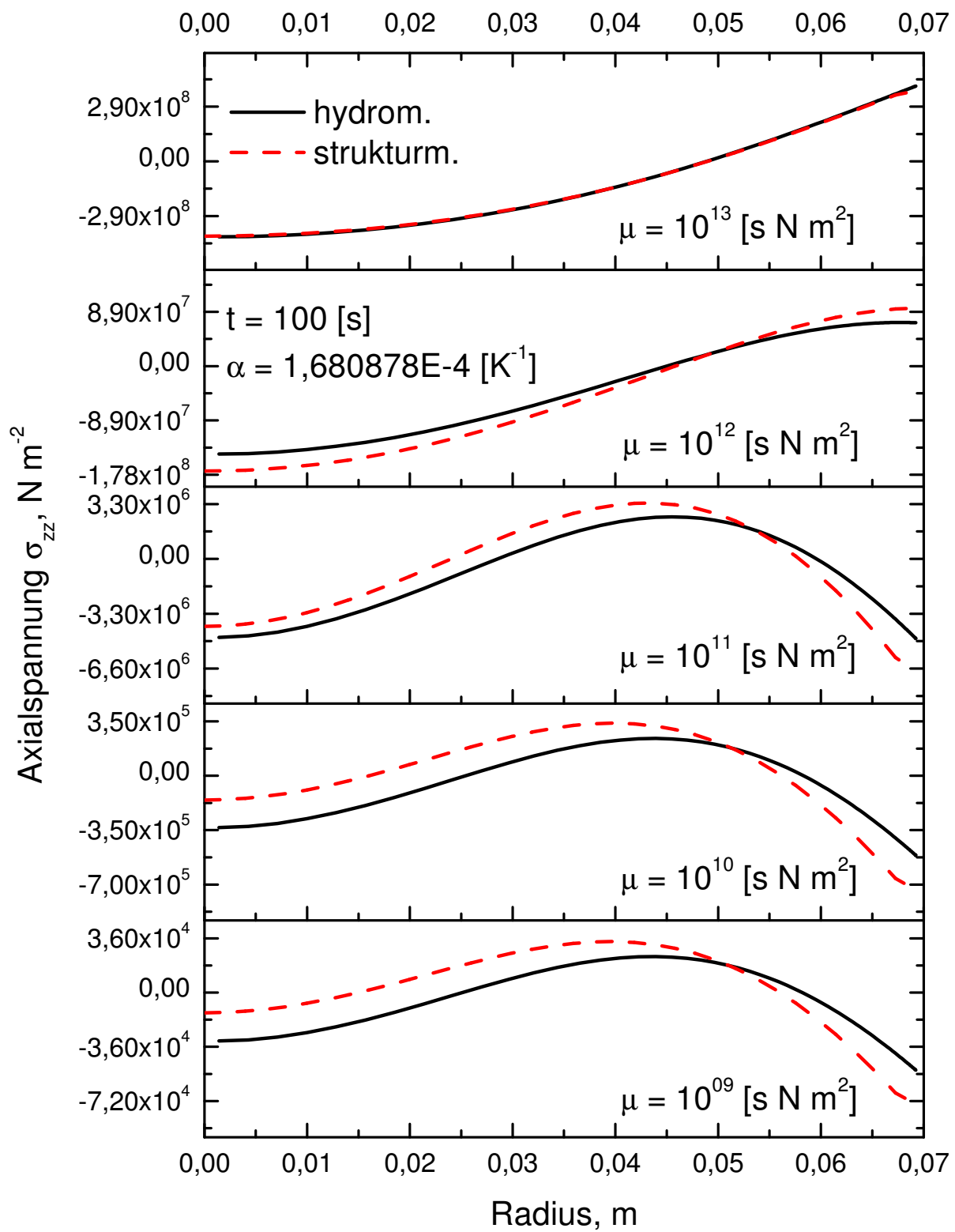


Abbildung 8.29: Axialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten

8.3.3 Massenbilanz: Eisenkohlenstofflegierungen

In den vorangegangenen Rechnungen sind die Abweichungen im Spannungs- und Dichteverlauf eines massekonsistenten Abkühlungsvorgangs anhand von idealisierten Materialdaten exemplarisch untersucht worden. Um Abschätzen zu können inwieweit die Dichteänderungen und das Fließverhalten eines präziser modellierten Materials einen Einfluss auf den Spannungs- und Dehnungszustand haben, ist eine Abkühlungsrechnung für eine reine Eisenkohlenstofflegierung mit einem Gewichtsanteil von 0,1 wt% Kohlenstoff durchgeführt worden. Für diese Legierung sind die thermo-physikalischen Materialdaten und die Materialfunktionen nicht mehr konstant sondern von der Temperatur abhängig. In dem **Anhang D** sind die thermo-physikalischen Funktionen beschrieben, mit denen die anschließenden Rechnungen durchgeführt werden. Das elastisch viskose Materialverhalten wird mit einem temperaturabhängigen Elastizitätsmodul und einem spannungs- und temperaturabhängigen Kriechgesetz beschrieben.

$$E_\gamma = 208060 (0,981 - 4,76 \cdot 10^{-4}T) \quad (8.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_\gamma^{cr} = 7,0 \cdot 10^{17} \left(\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} \right)^3 \sinh \left(\frac{60,137 \cdot \sigma_\gamma}{T} \right) \exp \left[-\frac{Q_\gamma}{RT} \right] \quad (8.14)$$

$$Q_\gamma = 272000 \quad (8.15)$$

Der Elastizitätsmodul hat die Einheit $[\text{MN m}^{-2}]$, die Temperatur $[\text{°C}]$. Die Größe Q ist die Aktivierungsenergie.

Es gelten die Anfangs- und Randbedingungen der vorangegangenen Rechnungen. Es ist aber für diese Untersuchung eine zweite Rechnung mit einer Anfangstemperatur von $T = 1700 \text{ [K]}$ gemacht worden, um den Effekt einer sehr großen Dichteänderung bei der Legierung bewerten zu können, Diagramm (8.11). Für den gewählten Temperaturbereich ist das Material einphasig. Es gilt eine Querkontraktion von $\nu = 0,3$.

Die Diagramme (8.30) und (8.31) vergleichen das Schrumpfungsverhalten beider Modelle und Anfangstemperaturen für die 0,1 wt%C Legierung miteinander. Es ist in beiden Fällen zu erkennen, dass die Schrumpfung des strukturmechanischen Modells etwas unterhalb der des hydro-mechanischen liegt. Um den damit verbundenen Masseverlust abschätzen zu können, vergleicht das Diagramm (8.32) die mittleren Dichten im Verlauf der Rechnung miteinander. Die Referenzgröße für die Abweichung stellt wieder die mittlere Dichte des hydro-mechanischen Modells dar. Entgegen dem wechselhaften Abweichungen beim idealisierten Materialverhalten, nimmt in diesem Fall die Abweichung der mittleren Dichte des strukturmechanischen Modells monoton zu. Wie aus den Rechnungen mit konstanten Materialparametern zu erwarten war, ist die Abweichung einer Starttemperatur von $T = 1700 \text{ [K]}$ wegen der größeren Dichteänderungen höher.

Die Diagramme (8.33) bis (8.36) vergleichen für fünf unterschiedliche Zeitpunkte die berechneten Radial-, Tangential- und Axialspannungen sowie die Drücke beider Modelle für eine Anfangstemperatur von $T = 1700 \text{ [K]}$ miteinander. Alle Spannungs- und Druckkurven verlaufen sehr ähnlich. Es gibt also keinen grundsätzlichen Unterschied in den Verläufen. Die Kurven sind aber nicht gleich. Die Unterschiede sind aber nicht so groß, als dass die fehlende Kopplung zwischen Massen- und Impulsbilanz zu einem komplett falschen Spannungsbild führt. Abkühlungsrechnungen für Festkörper können daher sehr gut mit dem oft gewählten Ansatz der additiven Zerlegung der Dehnung in mechanische und thermische Anteile gerechnet werden. Das gilt auch

für den Abkühlungsrechnungen aus dem Hochtemperaturbereich heraus. Die Abweichungen, die sich aus der fehlenden Massenbilanzierung ergeben, sind sowohl im Schrumpfungsverhalten als auch in den Spannungen sehr gering, obwohl die Abweichungen der mittleren Dichte für extrem hohe Dichteänderungen im zweistelligen Bereich liegen. Neben der Bewertung des Spannungs- und Verschiebungszustands zeigt die Auswertung aber auch, dass die Druckkorrekturmethode ohne weiteres für Spannungsrechnungen in Festkörpern angewendet werden kann.

Die Diagramme (8.37) bis einschließlich (8.56) zeigen die Ergebnisse einer Parameterstudie zu dem hier gerechneten Fall mit dem Ziel etwaige Diskretisierungsfehler auszuschließen. Für das hydro-mechanische Modell sind dabei unterschiedliche Zeitschrittweiten und Anzahl von Knotenpunkten untersucht worden, Diagramme (8.37) bis (8.41) und (8.42) bis (8.46). Für das strukturmechanische Modell sind anstatt unterschiedlicher Zeitschrittweiten unterschiedlich große Temperaturschrittweiten und die Anzahl der Elemente untersucht worden, Diagramme (8.47) bis (8.51) und (8.52) bis (8.56).

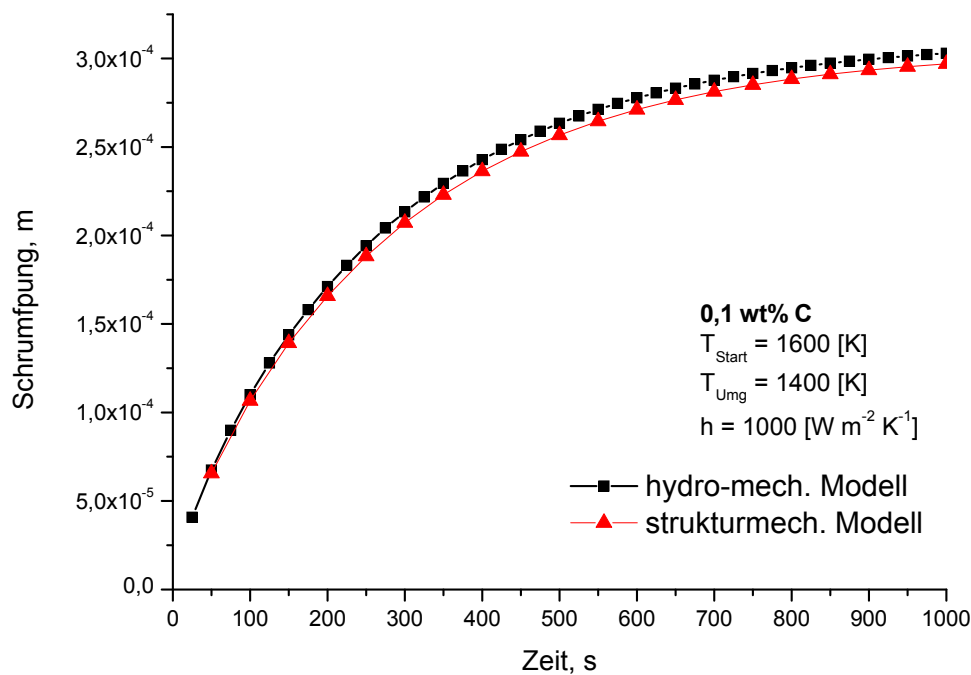


Abbildung 8.30: Schrumpfungskurven beider Modelle für 0,1 wt% C, $T = 1600 \text{ [K]}$

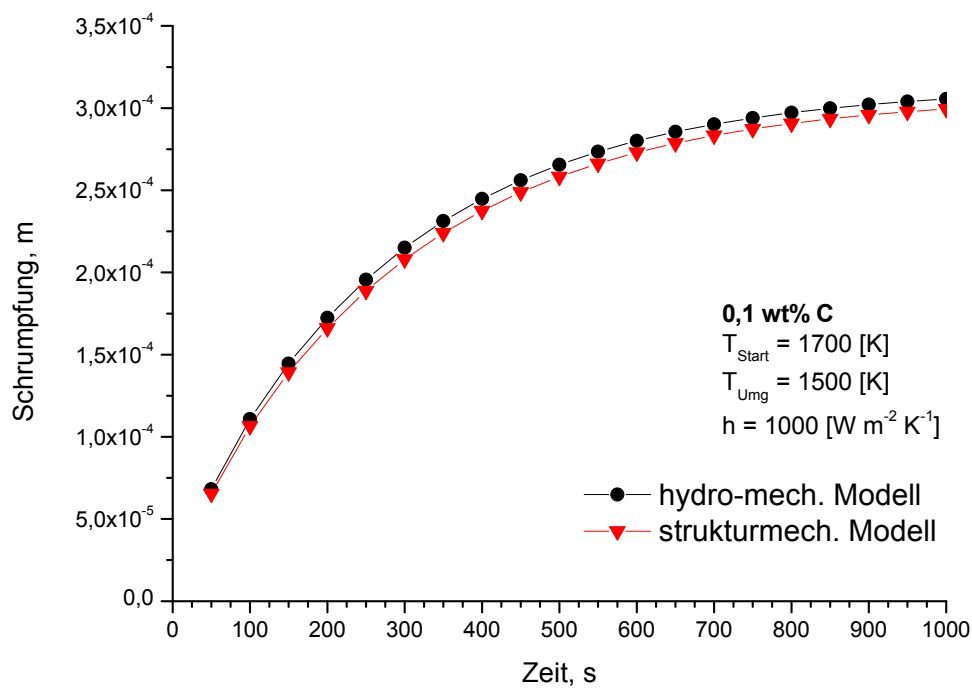
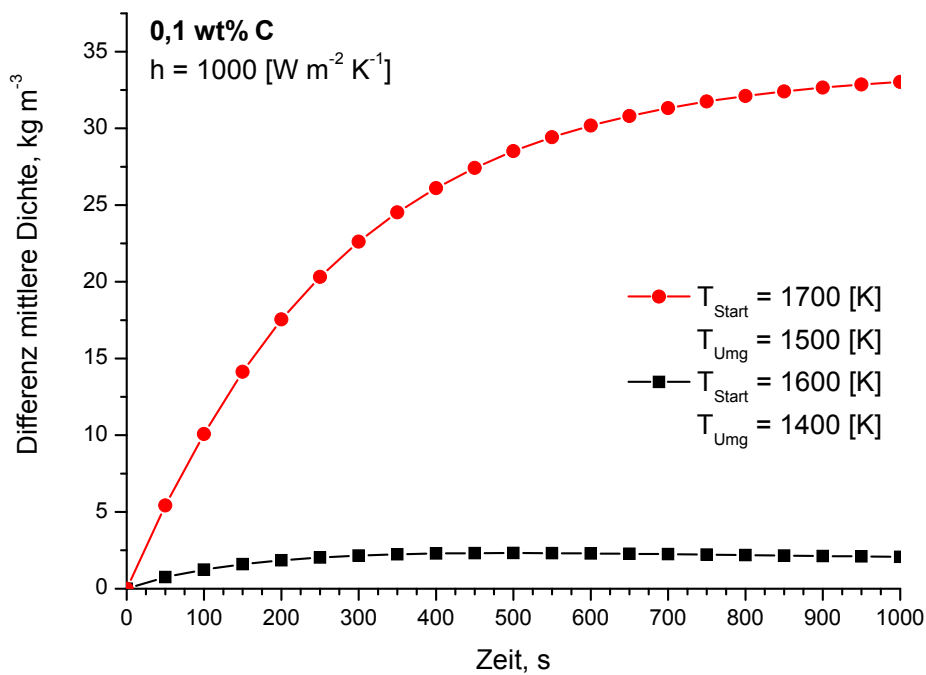
Abbildung 8.31: Schrumpfungskurven beider Modelle für 0,1 wt% C, $T = 1700$ [K]

Abbildung 8.32: Abweichung der mittleren Dichte für 0,1 wt% C

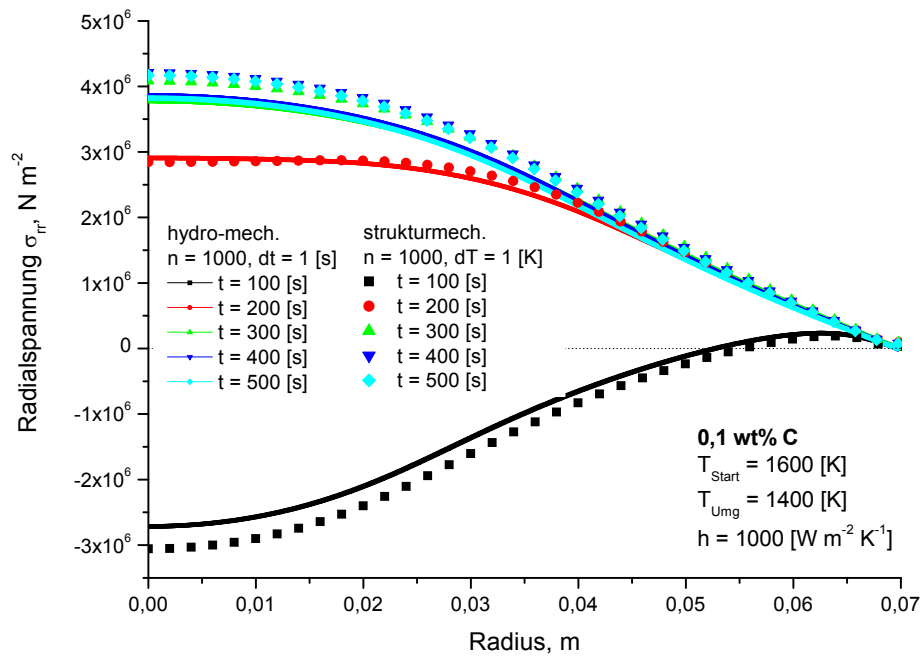


Abbildung 8.33: Radialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C

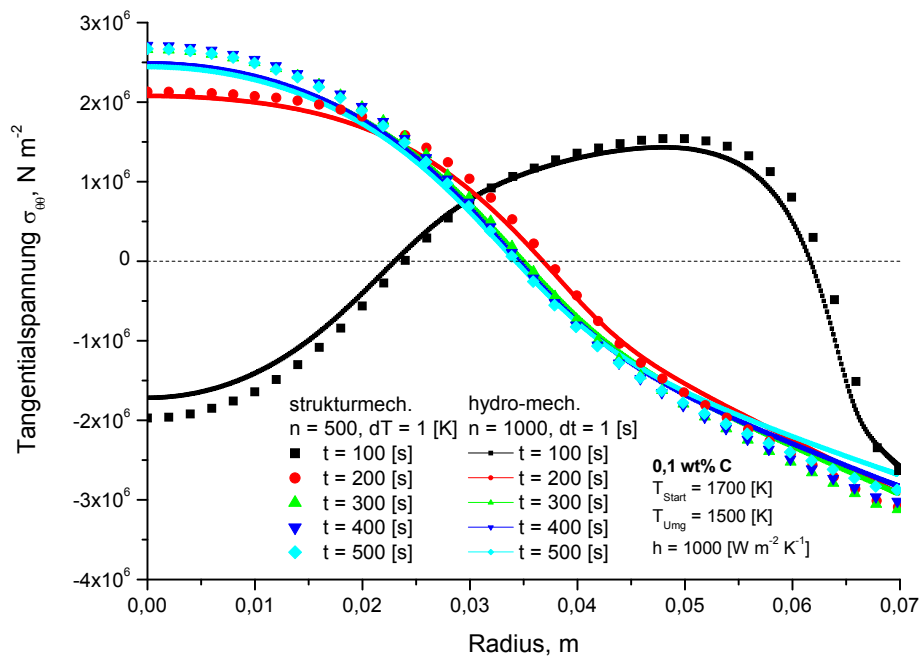


Abbildung 8.34: Tangentialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C

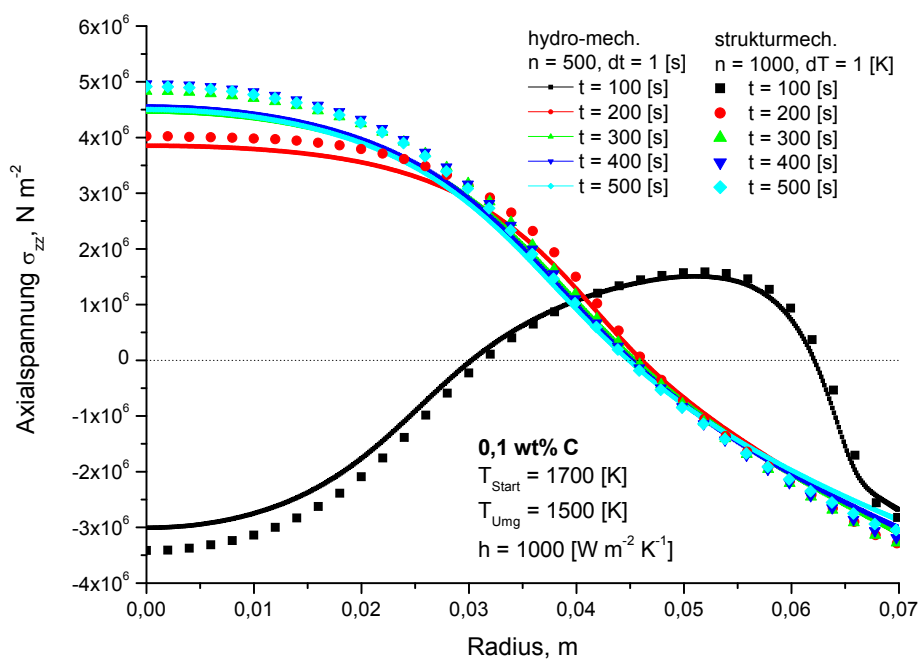


Abbildung 8.35: Axialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C

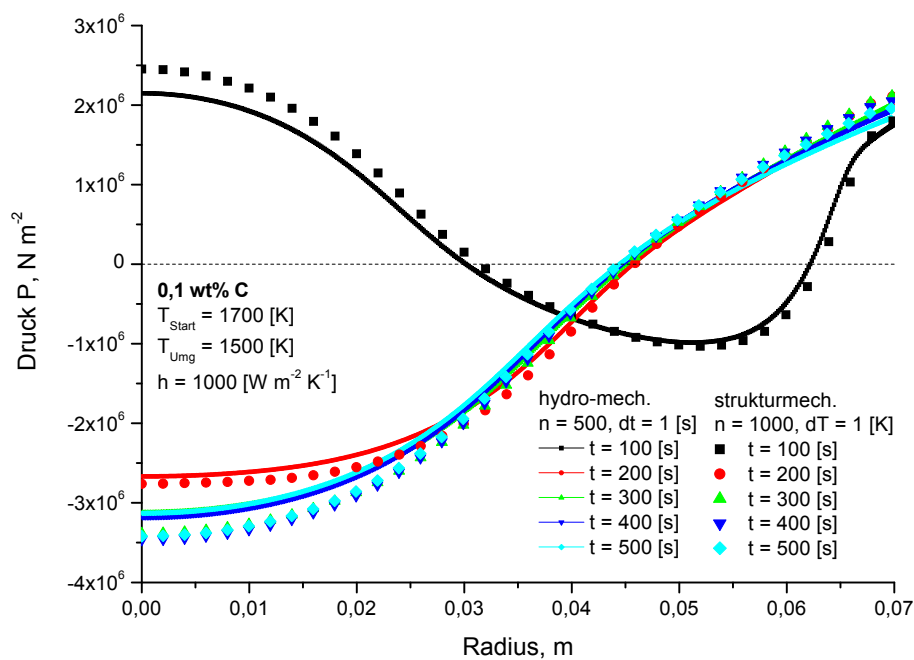


Abbildung 8.36: Druckprofile beider Modelle für 0,1 wt%C

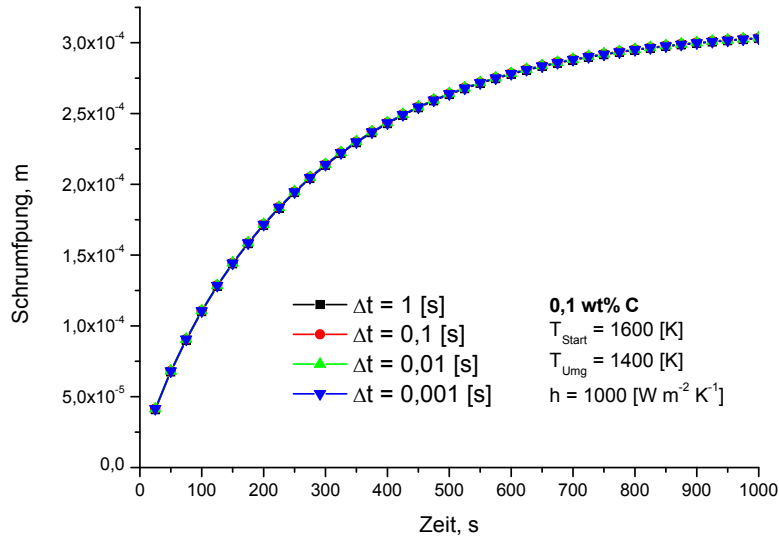


Abbildung 8.37: Schrumpfung 0,1 wt%C, Zeitschritte

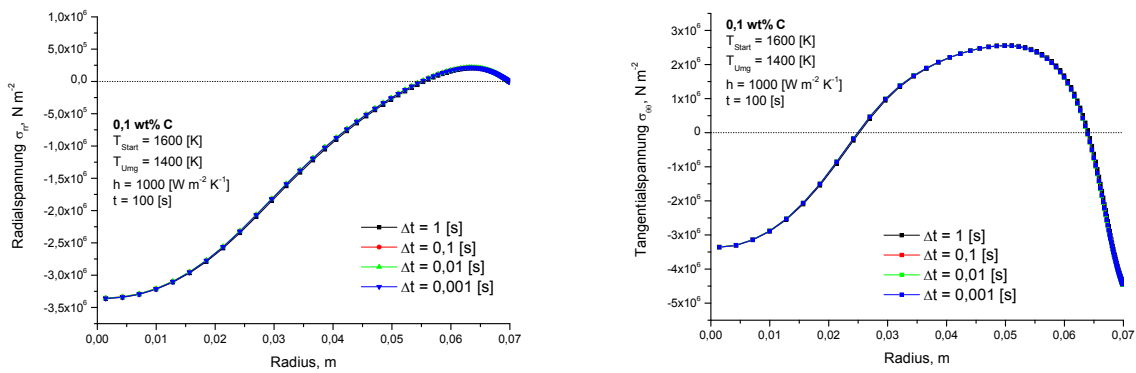


Abbildung 8.38: Radialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte

Abbildung 8.39: Tangentialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte

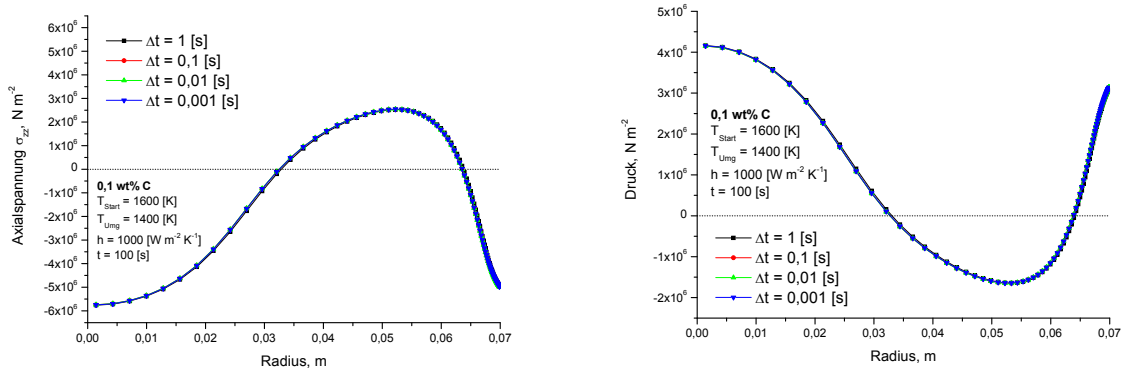


Abbildung 8.40: Axialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte

Abbildung 8.41: Druck 0,1 wt%C, Zeitschritte

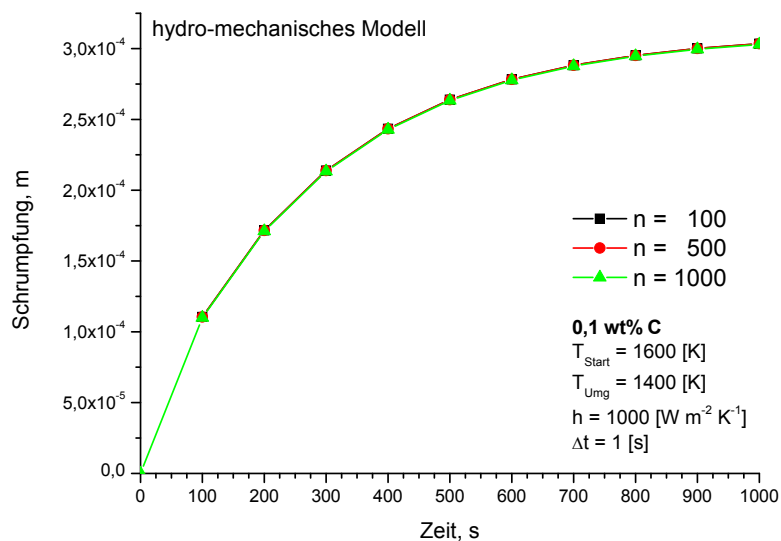


Abbildung 8.42: Schrumpfung 0,1 wt%C, Knotenpunkte

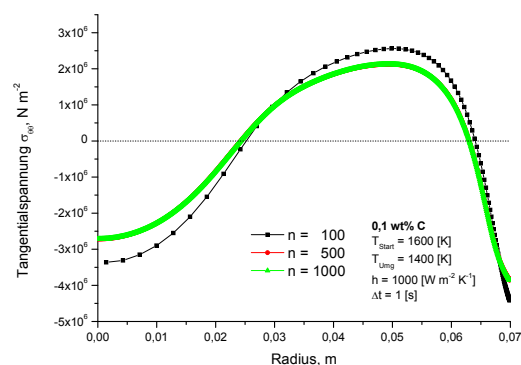
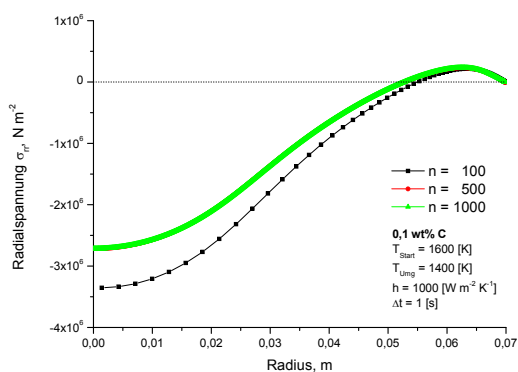


Abbildung 8.43: Radialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte

Abbildung 8.44: Tangentialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte

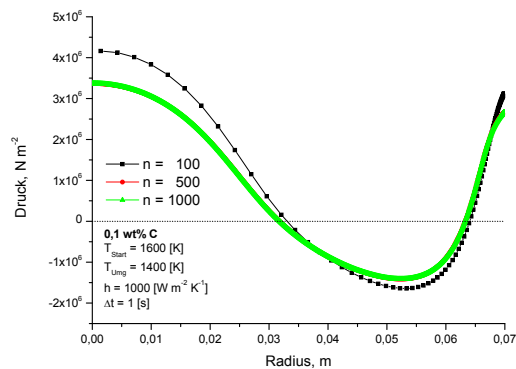
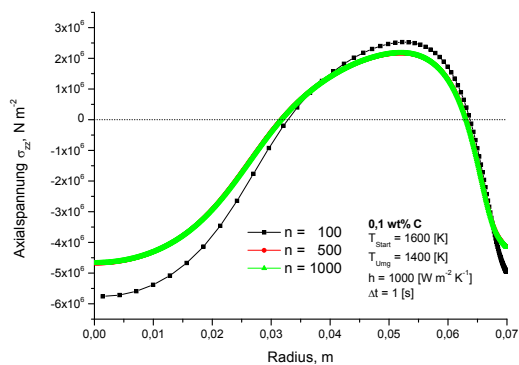


Abbildung 8.45: Axialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte

Abbildung 8.46: Druck 0,1 wt%C, Knotenpunkte

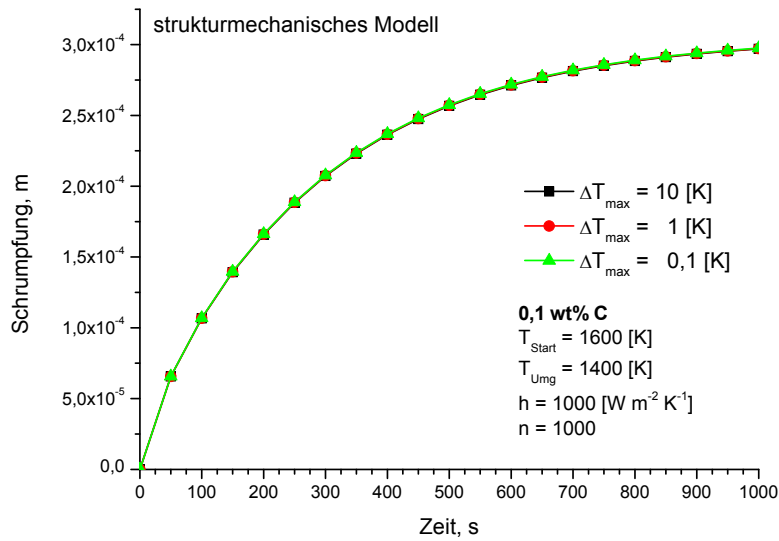


Abbildung 8.47: Schrumpfung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite

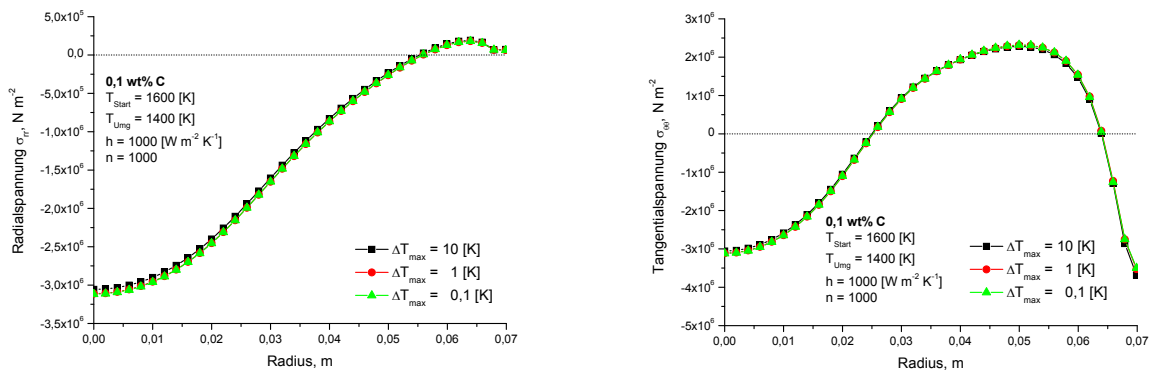


Abbildung 8.48: Radialspannung 0,1 wt%C, Abbildung 8.49: Tangentialspannung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite

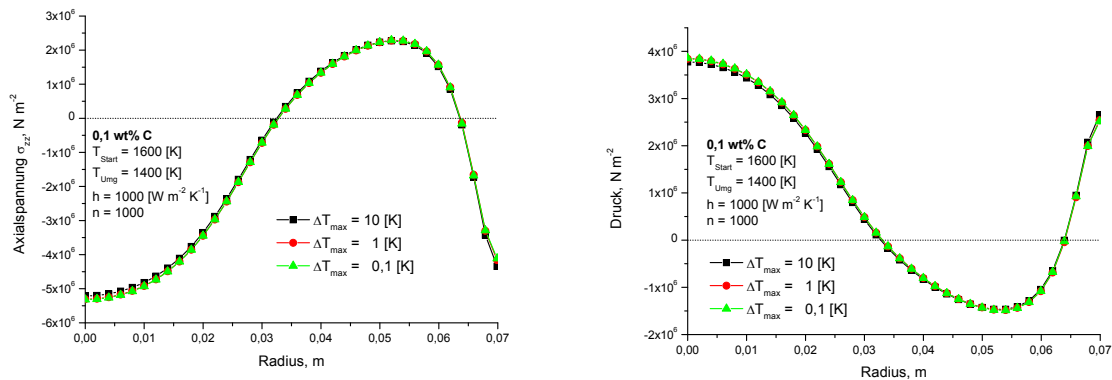


Abbildung 8.50: Axialspannung 0,1 wt%C, Abbildung 8.51: Druck 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite

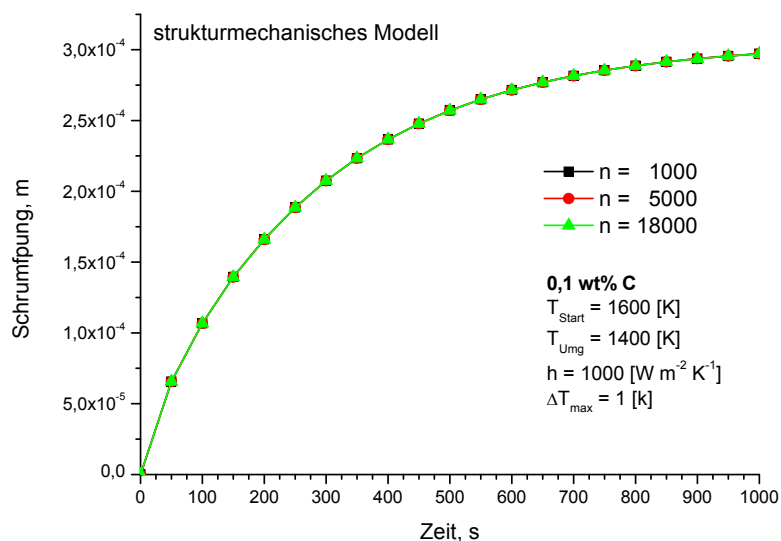


Abbildung 8.52: Schrumpfung 0,1 wt%C, Elementanzahl

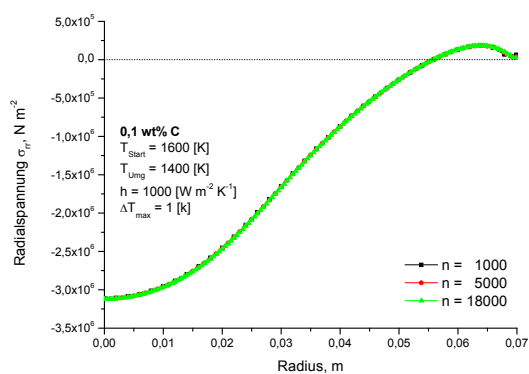


Abbildung 8.53: Radialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl

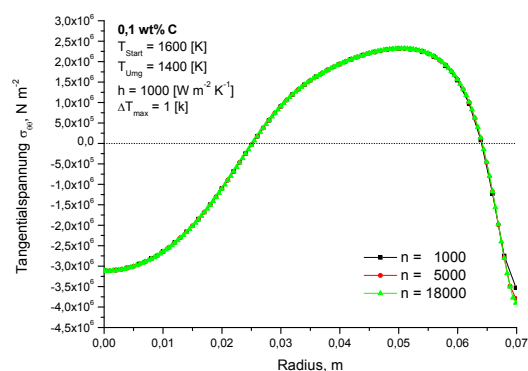


Abbildung 8.54: Tangentialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl

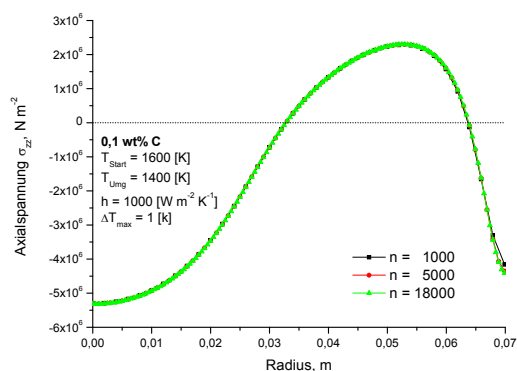


Abbildung 8.55: Axialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl

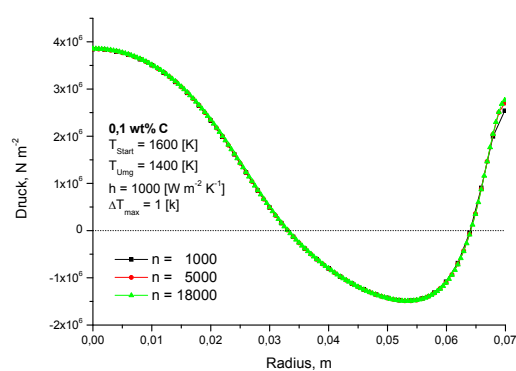


Abbildung 8.56: Druck 0,1 wt%C, Elementanzahl

8.4 Erstarrungs- und Schrumpfungsverhalten von Eisen-Kohlenstoff-Legierungen

Die nachfolgenden Spannungsrechnungen testen das hydro-mechanische Modell für Erstarrungsvorgänge. Für alle Rechnungen gelten die im **Anhang D** aufgelisteten thermo-physikalischen Materialdaten und Spannungsgesetze. Die Rechnungen werden alle für reine Eisenkohlenstofflegierungen durchgeführt.

8.4.1 Druckzustand in der flüssigen Phase

Das hydro-mechanische Modell ermöglicht es, den Druck in der flüssigen Phase bei Spannungsrechnungen für Erstarrungsvorgänge mit auszurechnen. Der Druck ist im hydro-mechanischen Modell keine Rand- oder Sonderbedingung mehr, sondern Teil der Spannungsrechnung. Die Art und Weise wie der Druck in der flüssigen Phase berücksichtigt wird, sollen die zwei nachfolgenden Rechnungen verdeutlichen. Diese vergleichen das Druck- und Geschwindigkeitsverhalten für ein offenes und ein geschlossenes System miteinander. Im offenen System ist ein axialer Massenaustausch erlaubt, im geschlossenen System dagegen nicht.

Die Druckentwicklung eines abgeschlossenen Systems zeigt das Diagramm (8.57). Es ist in dem Diagramm zu erkennen, dass der Druck in der flüssigen Phase mit fortschreitender Erstarrung ansteigt, was gleichbedeutend mit einer Zunahme des Unterdrucks ist. Prinzipiell existiert in den ersten Sekunden der Erstarrung ein Überdruck in der flüssigen Phase, da die erstarrende Schale auf die eingeschlossene Schmelze drückt. Mit fortschreitender Erstarrung wächst der Speisungsbedarf der erstarrenden Schale. Da keine Schmelze aus axialer Richtung nachfließen kann, entsteht ein Unterdruck in der Schmelze. Die Druckentwicklung des hydro-mechanischen Modells, Abbildung (8.57), entspricht für den Erstarrungsvorgang den physikalischen Vorstellungen in einem abgeschlossenen System. Das Diagramm (8.58) zeigt für die gleichen Zeitpunkte die Druckverläufe eines offenen Systems. Es gilt in dem offenen System, dass ein axiale Massbewegungen möglich sind, sodass der Druck in der flüssigen Phase immer gleich einem vorgegebenen Druck ist. Es ist aus dem Diagramm zu erkennen, dass der Druck in der Schmelze immer den gleichen geforderten Wert annimmt.

Die Diagramme (8.59) und (8.60) zeigen die zu den Druckprofilen gehörenden Geschwindigkeitsprofile. Im Diagramm (8.59) ist das Geschwindigkeitsprofil des geschlossenen Systems zu sehen. Es ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeit in der flüssigen Phase immer gleich null ist. Das entspricht dem vom Modell geforderten Bewegungsprofil, da in der flüssigen Phase weder Bewegungen durch Dichtegradienten noch durch axiale Strömungen auftreten können. Aus dem nichtvorhandenen Geschwindigkeitsfeld resultieren keine Schubspannungen, jedoch Drücke, da diese unabhängig von den konstitutiven Materialgesetzen bestimmt werden können. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu vergleichbaren strukturelmechanischen Modellen, da bei diesen der Druck immer an die Materialgesetze und somit auch an Bewegungen gekoppelt ist.

Das Diagramm (8.60) zeigt das Geschwindigkeitsprofil des offenen Systems. In diesem ist zu erkennen, dass es in der flüssigen Phase immer ein von Null verschiedenes Geschwindigkeitsprofil gibt. Nach 20 Sekunden ist die Geschwindigkeit in der flüssigen Phase negativ, was einer nach Innen gerichteten Bewegung entspricht. In dieser Phase drückt die erstarrende Schale noch auf die Schmelze und veranlasst diese aus der Ebene herauszuströmen. Mit fortschreitender

Erstarrung reduziert sich der Druck auf die Schmelze und der Massebedarf zur Speisung der erstarrenden Schale steigt. Das Geschwindigkeitsprofil ist in dieser Situation positiv, was einem Massenzustrom in die Ebene hinein entspricht. Die Axial- und Radialbewegungen in der Schmelze ermöglichen es, den Druck in der Ebene so einzustellen, dass dieser immer dem hydrostatischen Druck entspricht. Diese zusätzlichen Bewegungen in der flüssigen Phase existieren bei vergleichbaren strukturelmechanischen Erstarrungsmodellen nicht.

Die Diagramme (8.61) und (8.62) vergleichen den Radialspannungs- und Geschwindigkeitszustand des offenen und geschlossenen Systems für zwei unterschiedliche Zeitpunkte direkt miteinander. Das Diagramm (8.61) zeigt den Zustand nach zehn Sekunden, bei dem die erstarrende Schale auf die Schmelze drückt. Die Geschwindigkeit in der Schmelze ist im offenen System negativ und es existiert ein Überdruck für die Schmelze im geschlossenen System. Das Diagramm (8.62) zeigt den Zustand nach 60 Sekunden, bei dem die erstarrende Schale einen erhöhten Massenbedarf hat. Die Geschwindigkeit der flüssigen Phase ist im offenen System positiv und es existiert ein Unterdruck in der flüssigen Phase des geschlossenen Systems.

Das für offene Systeme entstehende Geschwindigkeitsprofil in der flüssigen Phase darf keine Schubspannungen erzeugen. Die Schmelze muss daher sehr niedrigviskos sein, damit auftretende Schubspannungen sofort relaxiert werden. Das Diagramm (8.63) zeigt Radialspannungsverläufe für zwei unterschiedliche Zeitpunkte, für die unterschiedliche Drücke in der flüssigen Phase gelten und die Schmelze mit einem sehr weichem Dämpfer, $\mu_{\text{Liq}} = 10^4 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$, modelliert ist. Es ist aus dem Diagramm zu erkennen, dass alle Radialspannungen in der flüssigen Phase den geforderten Druckwert annehmen und es keinen Einfluss von Schubspannungen auf den Druck in der flüssigen Phase gibt.

Das Diagramm (8.64) zeigt nach 100 Sekunden den Verlauf aller Spannungen und des Drucks für eine 0,1 wt% Kohlenstofflegierung mit einer Viskosität von $\mu_{\text{Liq}} = 10^4 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$ in der flüssigen Phase. Es ist zu erkennen, dass alle Spannungen in der flüssigen Phase wegen der hohen Relaxation den vorgegebenen Druckwert annehmen. Im heterogenen Gebiet aus flüssiger und fester Phase treten dann mit Bildung der festen Phase Schubspannungen auf. Die Schubspannungen der festen Phase relaxieren im Vergleich zu denen der flüssigen Phase langsamer. Es ist zu erkennen, dass solange flüssige Phase existiert, der Druck dem vorgegebenen Schmelzendruck entspricht. Dieses Verhalten entspricht der gewählten Modellierung der axialen Ströme für den Übergangsbereich. Aus dem zusätzlich dargestellten Phasenverlauf ist ersichtlich, dass die Spannungsverläufe sich sprunghaft bei den Phasenübergängen ändern. Das kann aus dem Phasenübergang selber resultieren, da sich die Festigkeit des Materials beziehungsweise das Materialgesetz schlagartig ändert. Die Diagramme (8.65) bis (8.68) zeigen Druck- und Spannungsverläufe für unterschiedliche Zeitpunkte während der Erstarrung. Der prinzipielle Verlauf, der für den Zustand bei 100 Sekunden gilt, ist auch für andere Zeitpunkte erkennbar.

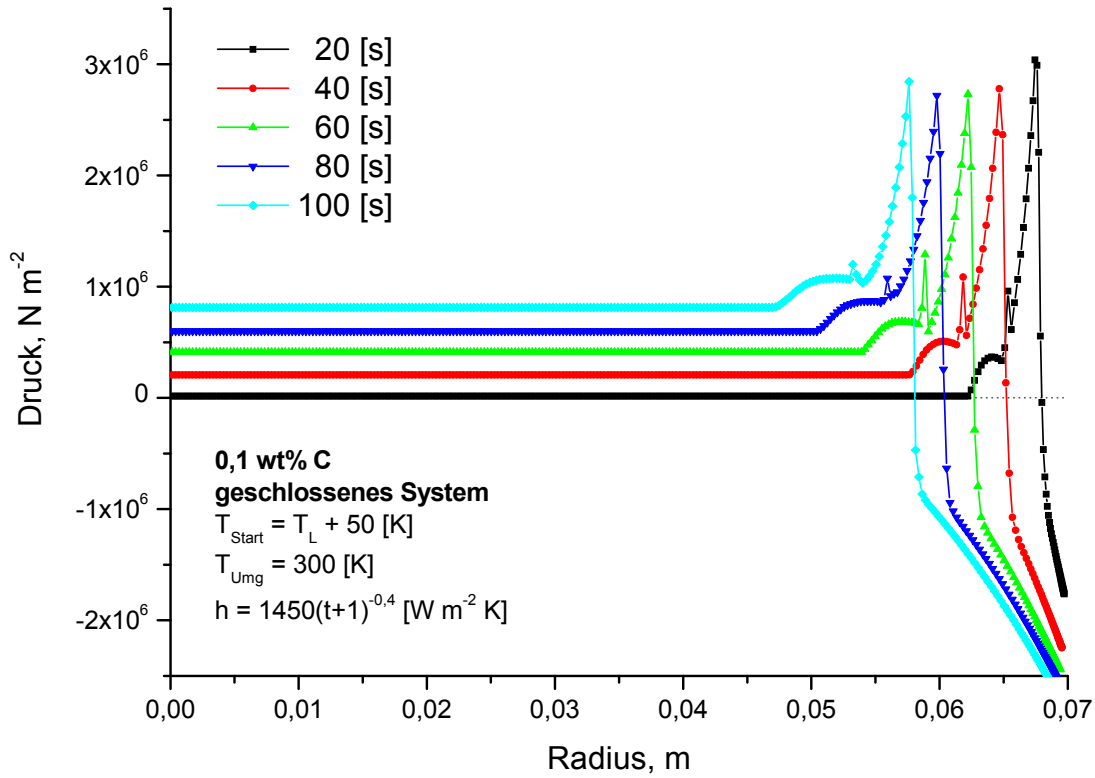


Abbildung 8.57: Druckprofil abgeschlossenes System

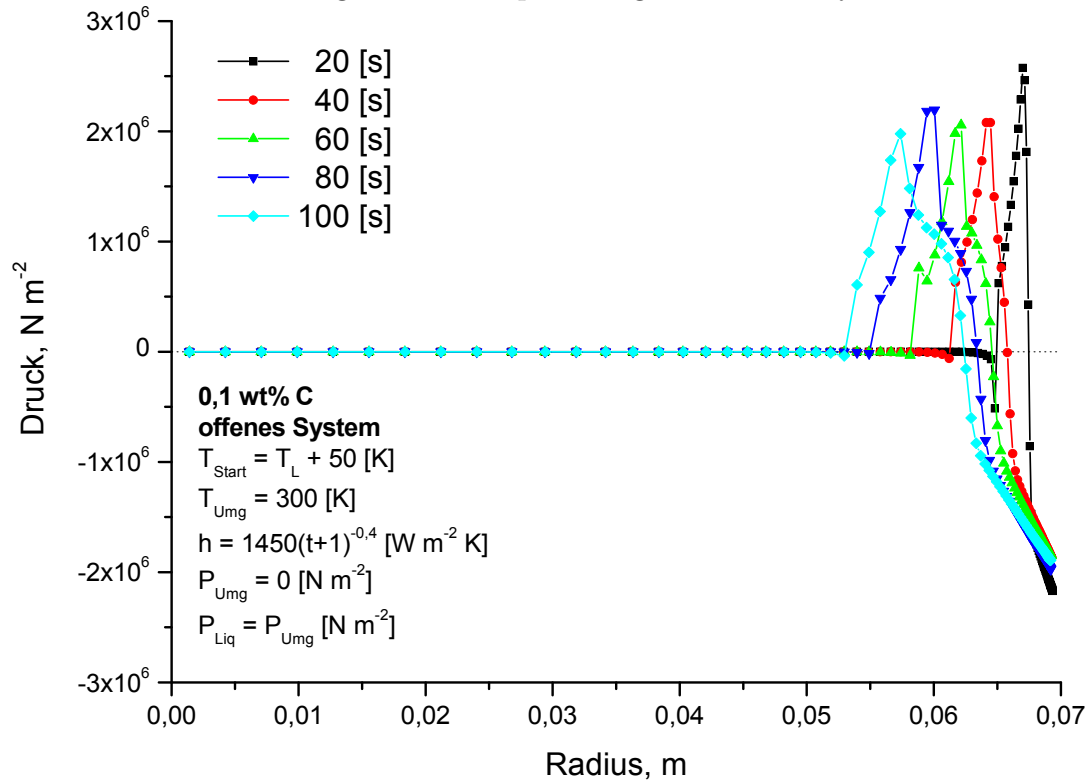


Abbildung 8.58: Druckprofil offenes System

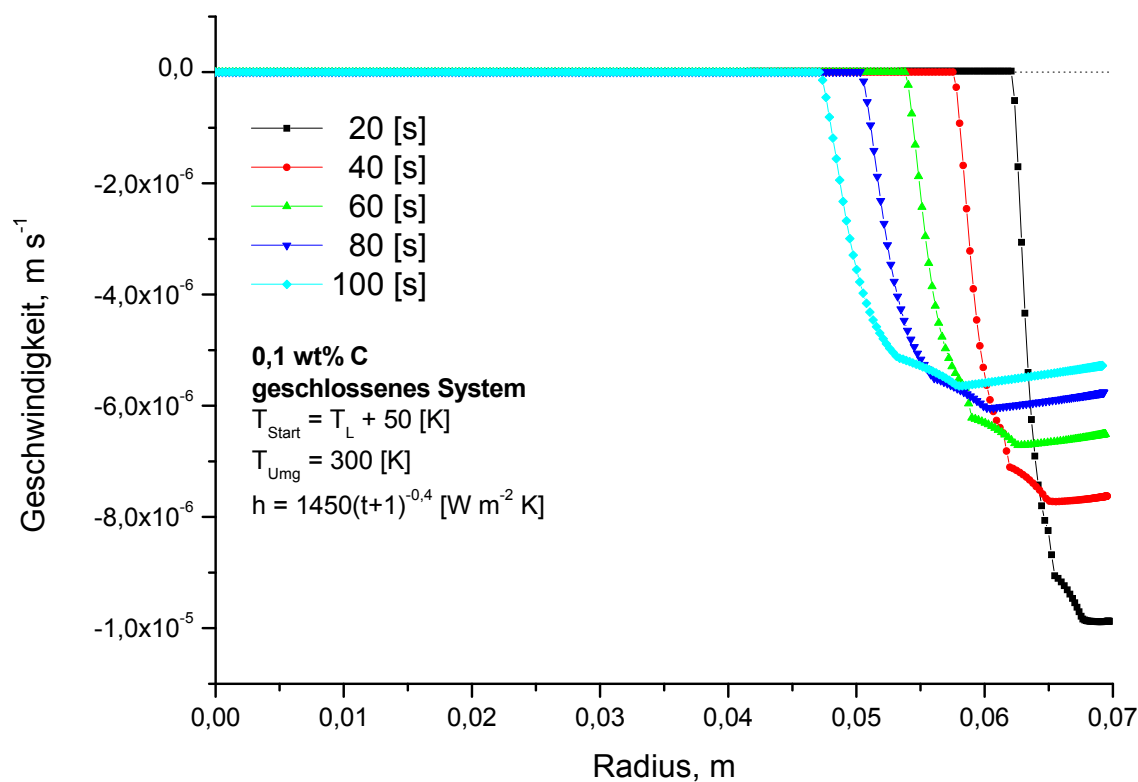


Abbildung 8.59: Geschwindigkeitsprofil abgeschlossenes System

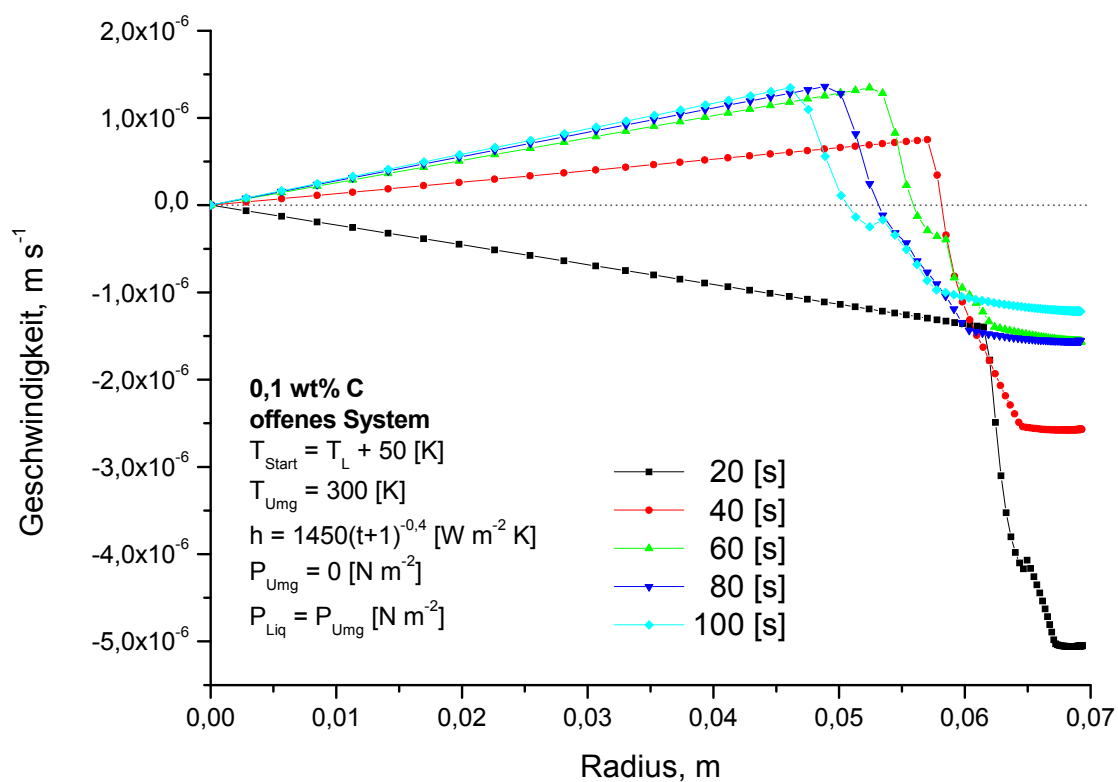


Abbildung 8.60: Geschwindigkeitsprofil offenes System

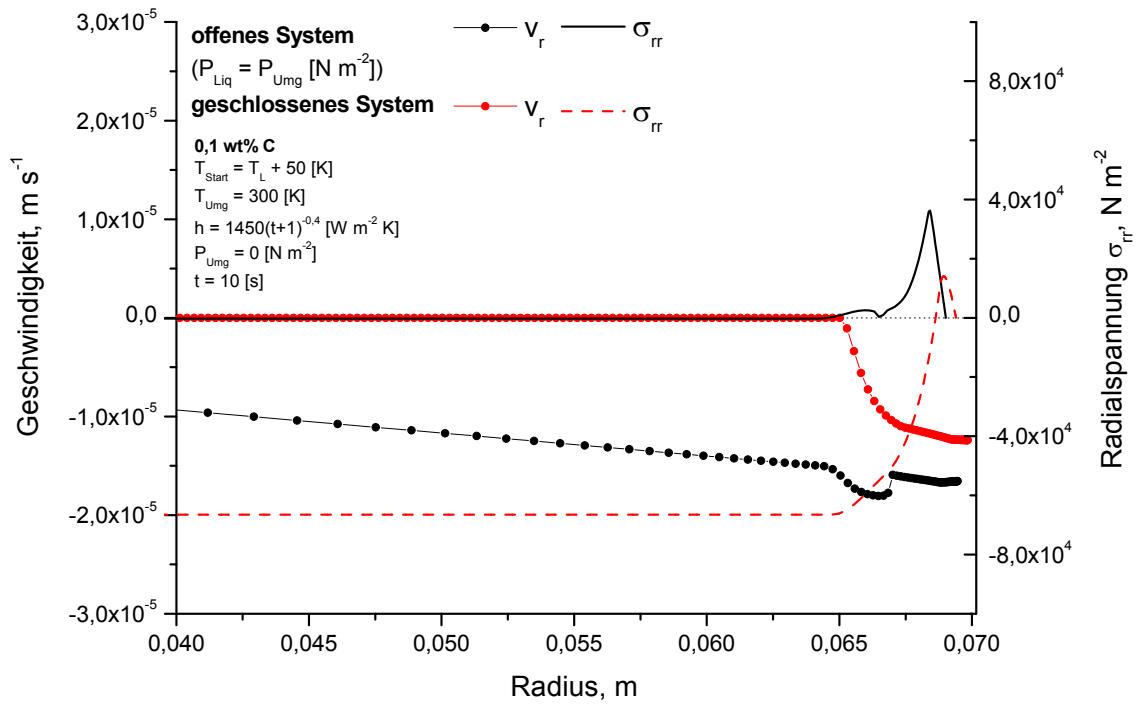


Abbildung 8.61: Geschwindigkeit und Radialspannung nach 10 Sekunden

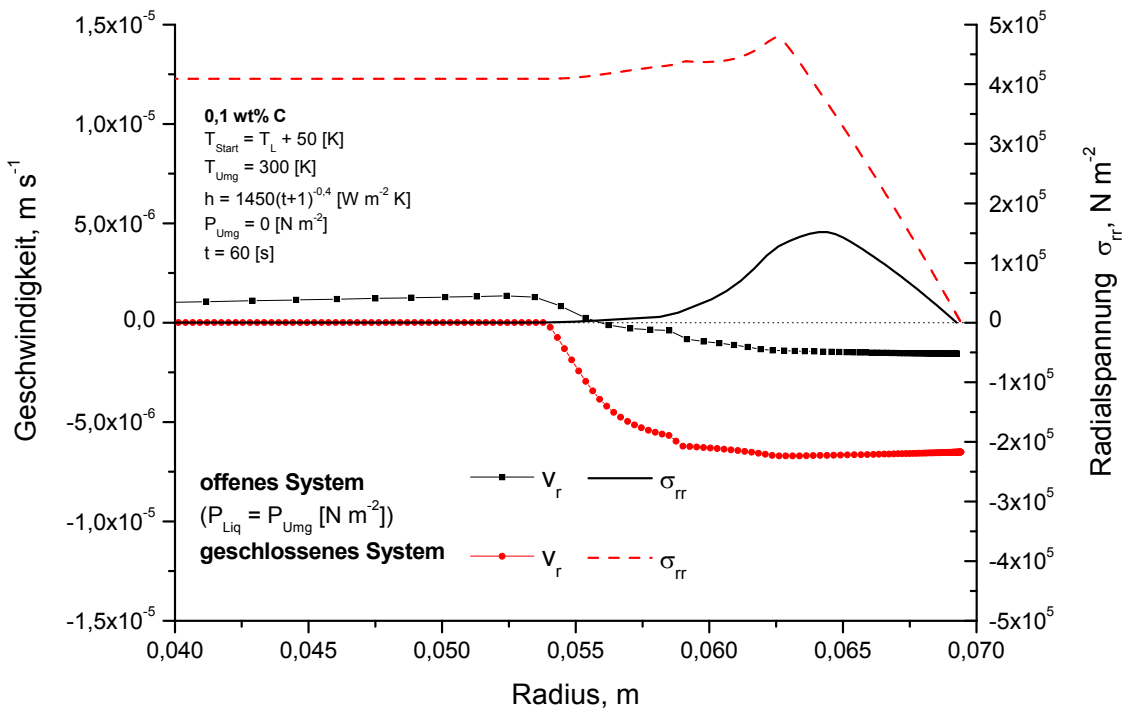


Abbildung 8.62: Geschwindigkeit und Radialspannung nach 60 Sekunden

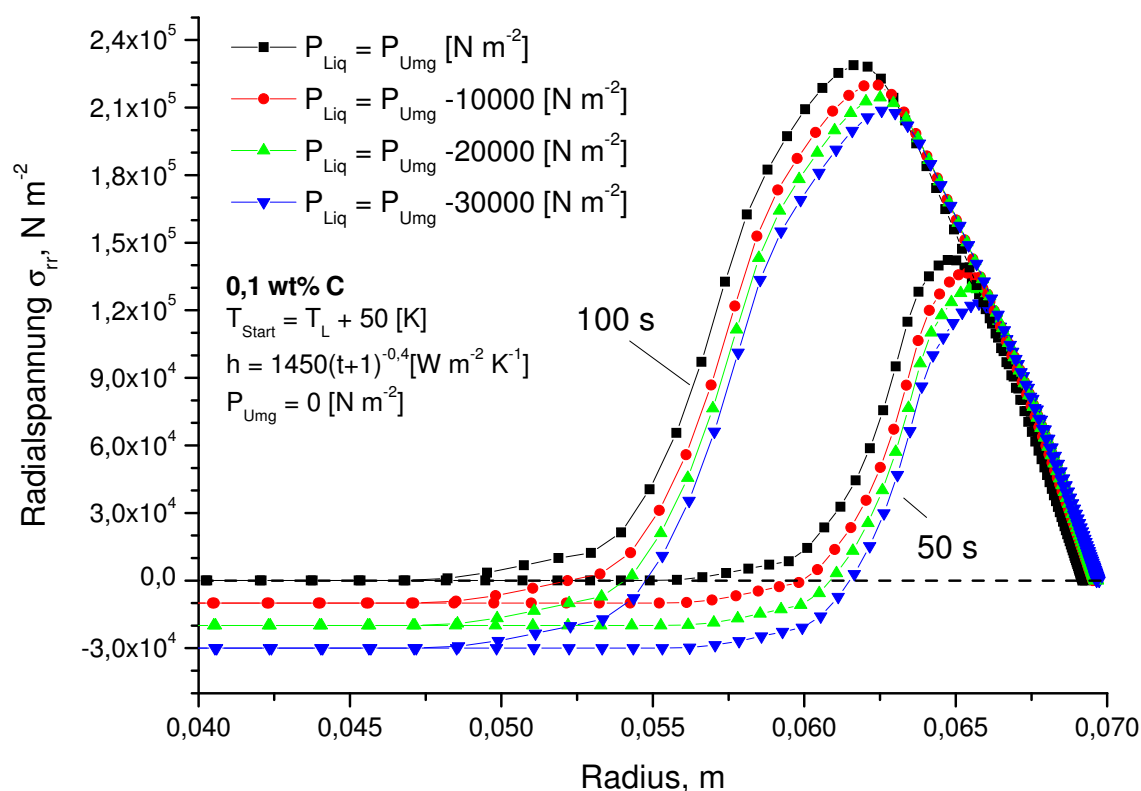
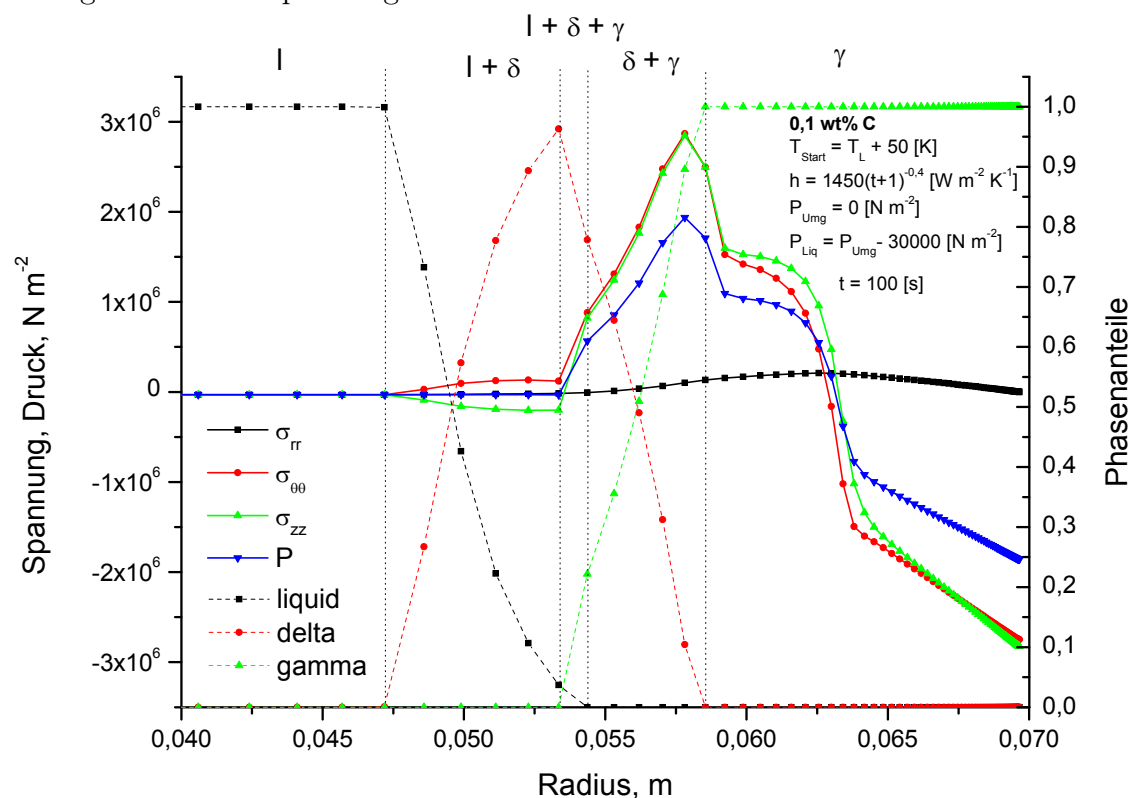


Abbildung 8.63: Radialspannungsverlauf bei unterschiedlichen Überdrücken in der Schmelze

Abbildung 8.64: Spannungs- und Druckverlauf nach 100 Sekunden, 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$

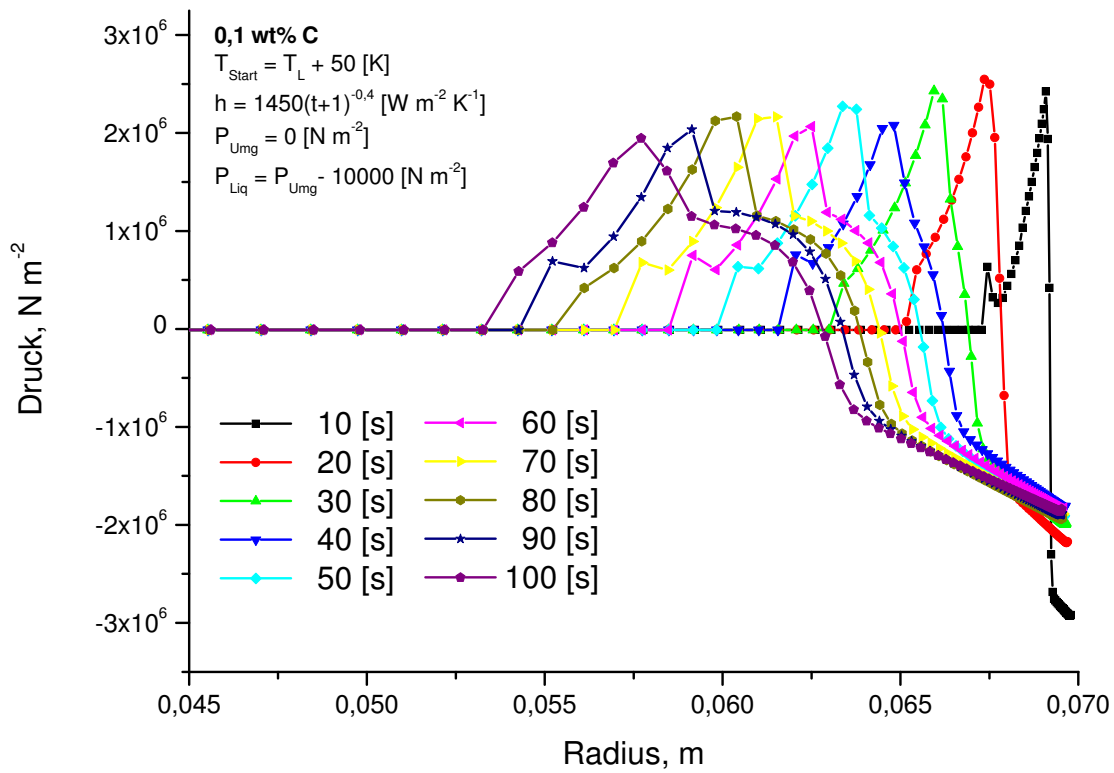


Abbildung 8.65: Druckprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$

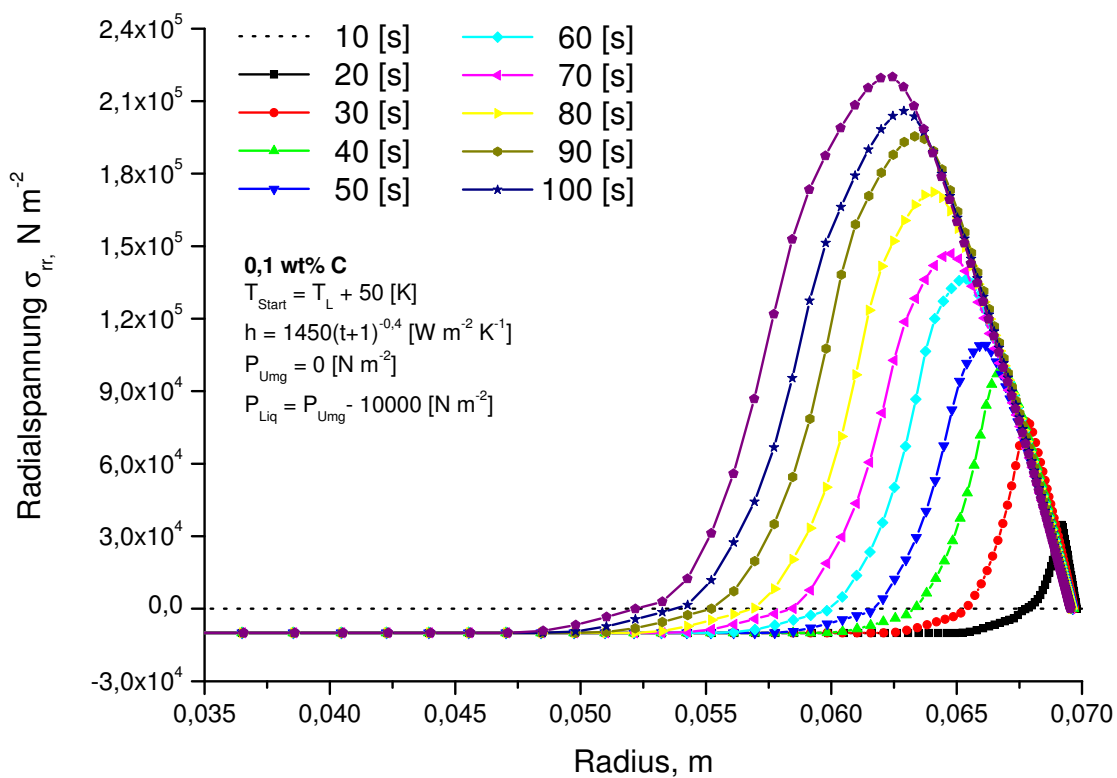
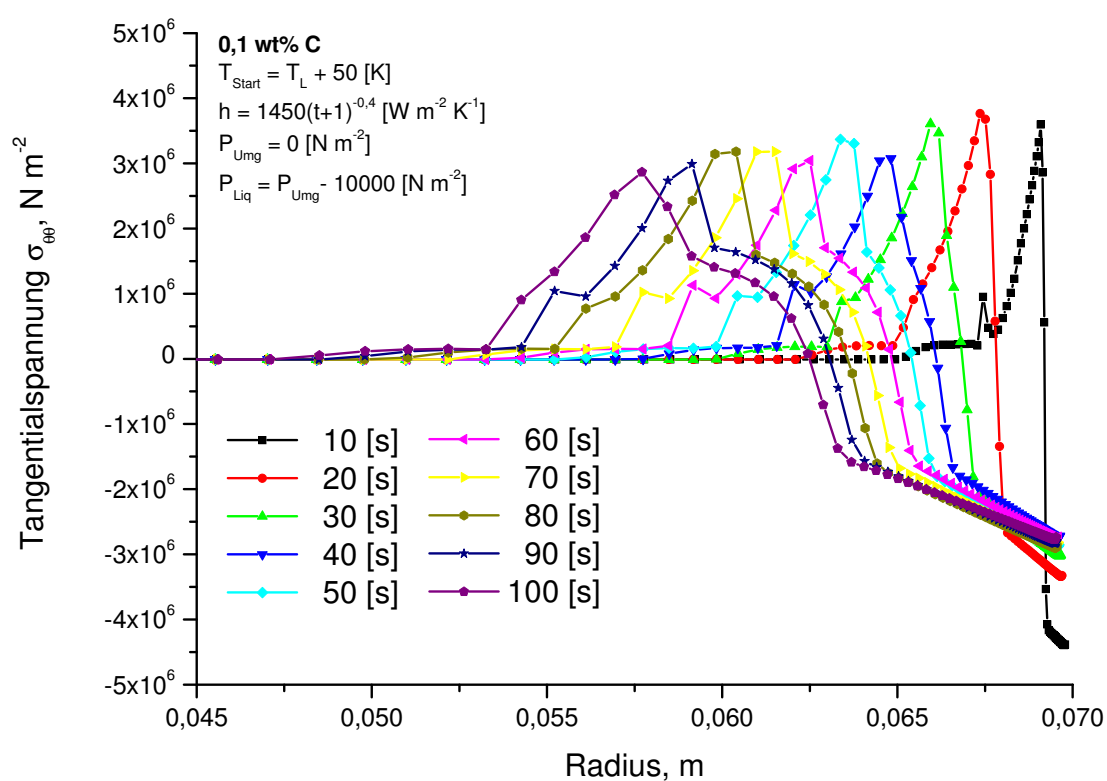
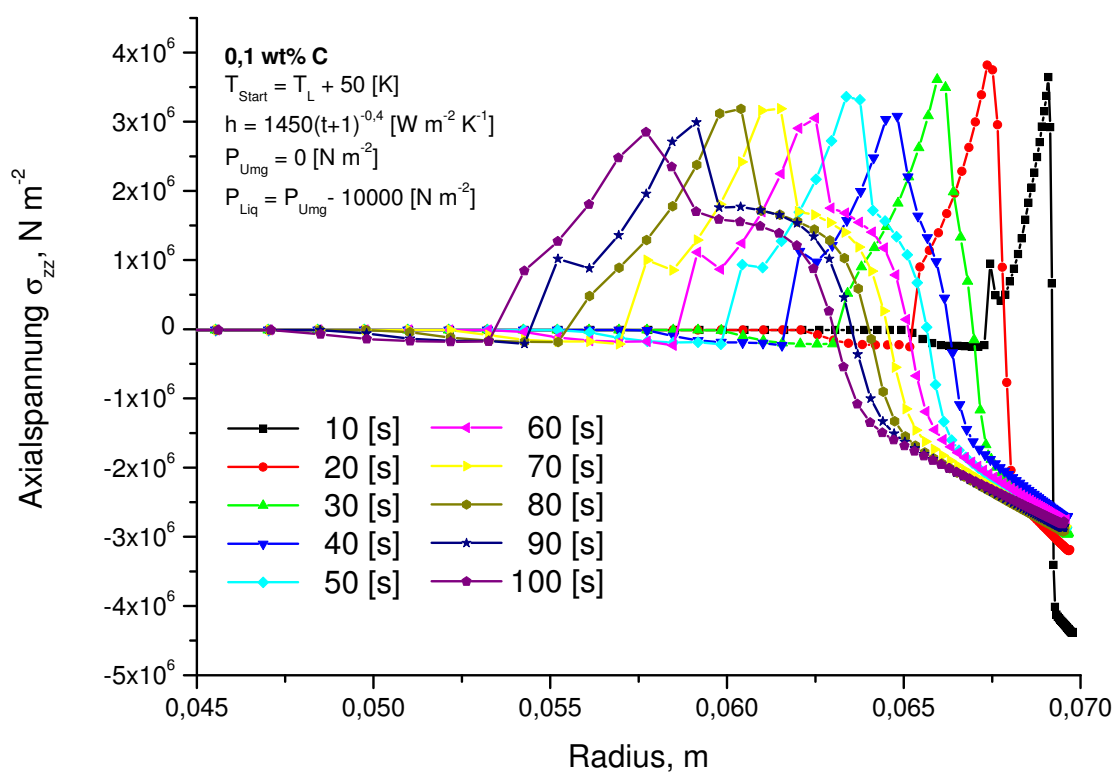


Abbildung 8.66: Radialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$

Abbildung 8.67: Tangentialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ [N m}^{-2}]$ Abbildung 8.68: Axialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ [N m}^{-2}]$

8.4.2 Prinzipielles Schrumpfungsverhalten der Eisenkohlenstofflegierungen

Das Diagramm (8.69) zeigt die Auswirkungen unterschiedlicher metallostatistischer Drücke auf das Schrumpfungsverhalten einer reinen Eisenkohlenstofflegierung mit einem Kohlenstoffgehalt von 0,1 wt%. Die Kurven werden dabei mit Messergebnissen aus der Arbeit von Harste [Har89] verglichen. Aus dem Diagramm ist zu erkennen, dass erst die Schrumpfkurven bei höheren metallostatistischen Drücken den gemessenen Schrumpfungswerten entsprechen. Das deckt sich mit der Modellvorstellung zur Simulation des erstarrenden Rundblocks, da das Gewicht des darüberliegenden Materials auf den mittleren Bereich des Blocks lastet und einen Überdruck in der flüssigen Phase erzeugt. Bei den Schrumpfkurven ist deutlich zu erkennen, dass mit höheren Drücken in der flüssigen Phase das Schrumpfen später einsetzt. Die erstarrende Schale wird durch den Druck länger gegen die Kokillenwand gedrückt. Erst mit Erreichen einer größeren Festigkeit kann die erstarrende Schale dem Innendruck entgegenwirken und anfangen zu schrumpfen. Ab einer Zeit von zehn Sekunden verlaufen die Kurven ungefähr parallel.

Das Diagramm (8.69) zeigt nur Kurven, bei denen das auf die mittlere Scheibe wirkende Gewicht nur in der flüssigen Phase berücksichtigt wird. Im Diagramm (8.70) sind Kurven dargestellt, bei denen das Gewicht sowohl auf der flüssigen als auch auf der festen Phase lastet. Die aus der Gewichtskraft resultierende Druckspannung auf die feste Phase ist dann gleich dem in der flüssigen Phase wirkenden metallostatistischen Druck. Trotz der auf beide Phasen wirkenden Kraft ist eine Abweichung im Schrumpfungsverlauf nur sehr schwach bei höheren Überdrücken zu erkennen und kann daher im ersten Ansatz vernachlässigt werden.

Das Schrumpfungsverhalten ist aber nicht nur durch den hydrostatischen Druck in der flüssigen Phase bestimmt, sondern auch durch die Wärmeabfuhr aus der erstarrenden Schale. Die Kontraktion des erstarrenden Festkörpers ist durch die thermodynamische Dichte vorgegeben, die wiederum durch die Temperatur und den Druck bestimmt ist. Die bei der ungleichmäßigen Abkühlung der erstarrenden Schale auftretenden Spannungen bzw. Drücke sind nicht so groß, dass diese die Dichte wesentlich verändern. Folglich bestimmt allein die Temperatur die Dichte und somit ist der Wärmeabtransport aus der Schale für das Schrumpfungsverhalten maßgeblich. Eine Abschätzung für den Einfluss der thermischen Randbedingung auf das Schrumpfen zeigt das Diagramm (8.71). Es sind die Auswirkungen unterschiedlicher Umgebungstemperaturen auf das Schrumpfungsverhalten der Schale getestet worden. Der Wärmeübergangskoeffizient ist in allen Fällen durch die gleiche zeitabhängige Funktion beschrieben. In der flüssigen Phase gilt ein Überdruck von $P = 10^4 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$. Es ist zu erkennen, dass mit abnehmendem Wärmestrom die Schrumpfung geringer ist. Das Schrumpfen setzt bei höheren Umgebungstemperaturen später ein, da die Schale noch nicht fest genug ist, um dem auf sie wirkenden Druck entgegen zu wirken. Erwartungsgemäß schrumpft die Schale mit geringerer Wärmeabfuhr weniger und langsamer.

Das Nachrechnen von gemessenen Schrumpfungswerten hängt, wie die drei bisherigen Diagramme für die 0,1 wt%C Legierung zeigen, von der Wahl des richtigen Überdrucks in der flüssigen Phase und der thermischen Randbedingung ab. Da ein Überdruck $P = 10^4 \text{ [N m}^{-2}\text{]}$ und eine Umgebungstemperatur von $T = 300 \text{ [K]}$ einen Schrumpfungsverlauf in dem gemessenen Bereich ergibt, sind Rechnungen mit diesen Parametern für Eisenkohlenstofflegierungen mit höheren Kohlenstoffgehalten durchgeführt worden, Diagramm (8.72). Nach den Untersuchungsergebnissen von Harste [Har89] sollte die Eisenkohlenstofflegierung mit 0,1 wt% Kohlenstoff das größte

Schrumpfungsverhalten gegenüber den anderen Legierungen aufweisen. Das Diagramm (8.72) zeigt aber, dass für die 0,1 wt%C Legierung das geringste Schrumpfungsverhalten gilt. Das Schrumpfen nimmt bis zu einem Kohlenstoffgehalt von ca. 0,6 wt% zu und erst danach nimmt das Schrumpfen mit zunehmenden Kohlenstoffgehalt ab. Da die Randbedingungen für die 0,1 wt% Kohlenstofflegierung zu einem Schrumpfungsverhalten führen, welches die Messdaten gut beschreiben, ist die Frage zu klären, warum das Schrumpfungsverhalten der höher legierten Legierungen weit außerhalb der gemessenen Werte liegen.

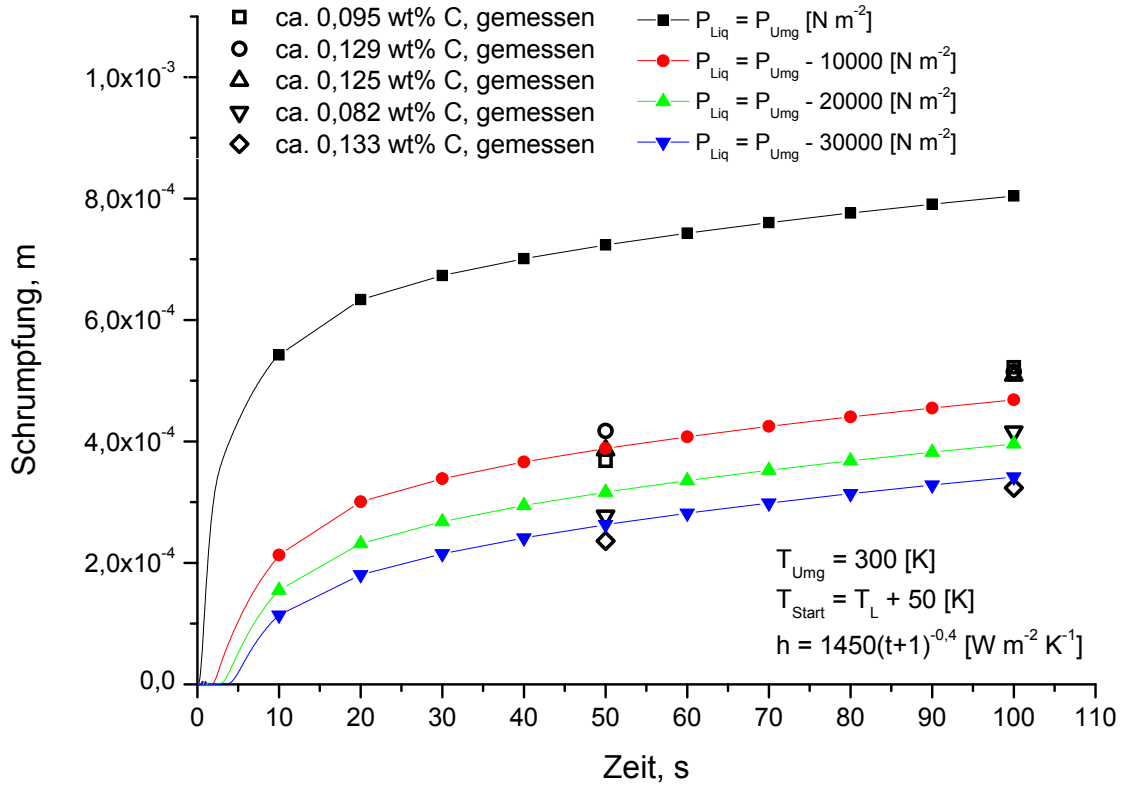


Abbildung 8.69: Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Drücke, 0,1 wt% C

Der Wärmestrom in die Kokille hinein, beeinflusst das Schrumpfungsverhalten maßgeblich und wird daher zunächst untersucht. Alle Rechnungen sind mit der gleichen thermischen Randbedingung durchgeführt worden. Bei dieser ist der Wärmeübergangskoeffizient als Funktion der Zeit definiert. Der Wärmeübergangskoeffizient berücksichtigt dadurch aber nicht die realen Bedingungen, da die Spaltbildung zwischen Schale und Kokille den Wärmeübergang stark beeinträchtigt. Daher ist die thermische Randbedingung variiert worden, indem der Wärmeübergangskoeffizient von der Spaltdicke abhängig gemacht worden ist. Es gilt für den Wärmeübergangskoeffizienten:

$$h = \frac{a}{d_0 + d} \quad (8.16)$$

$$a = 1 \quad (8.17)$$

Die Variable a [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1}$] ist zunächst empirisch gewählt. Die Variable d_0 ist eine minimale Spaltdicke von $d_0 = 10^{-4}$, die verhindert, dass der Wärmeübergangskoeffizient unendlich groß wird. Die Variable d ist die aktuelle Spaltdicke.

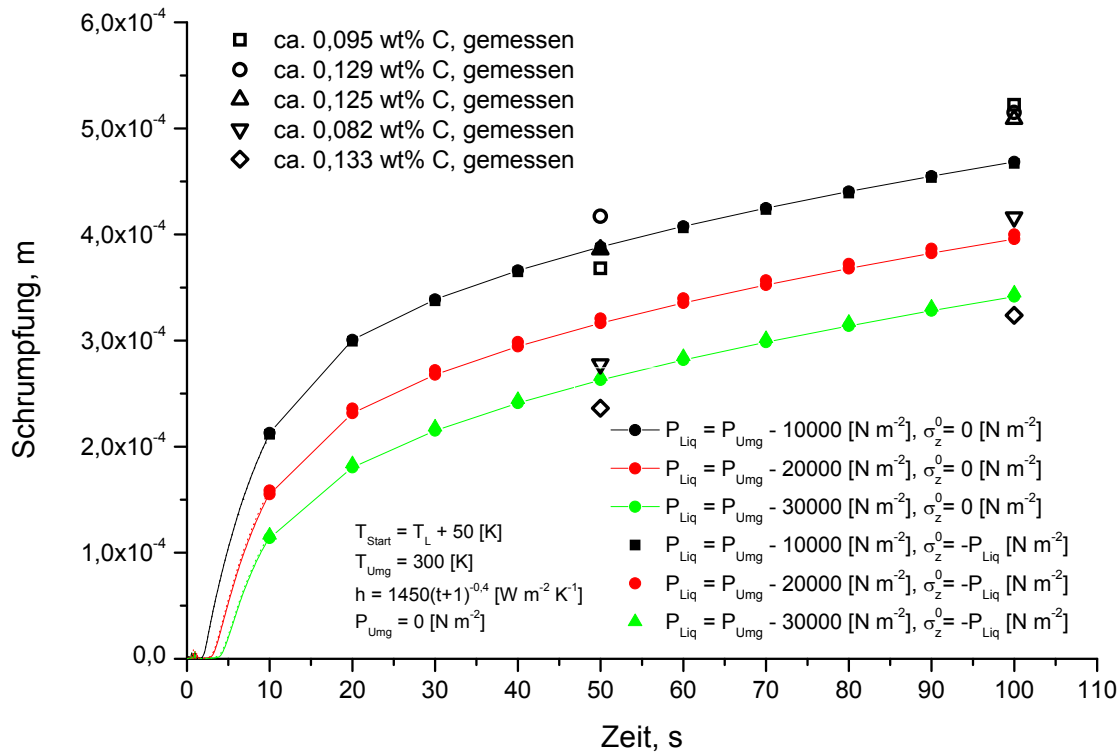


Abbildung 8.70: Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Axialkräfte, 0,1 wt% C

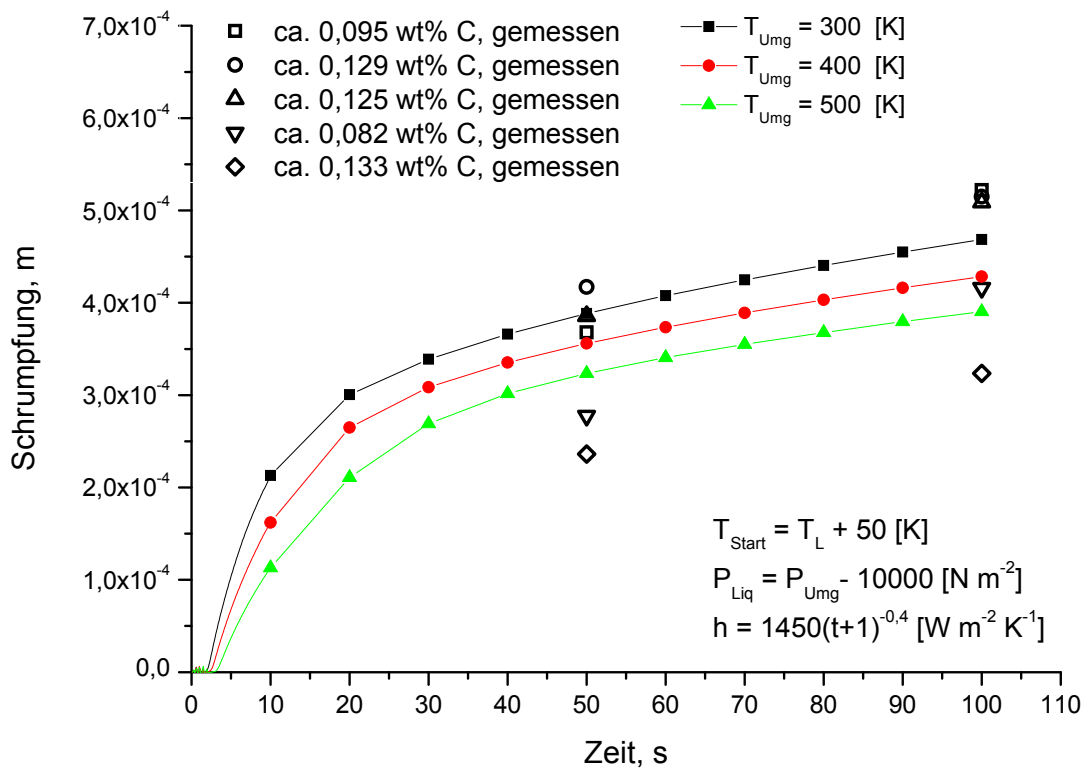


Abbildung 8.71: Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Umgebungstemperaturen, 0,1 wt% C

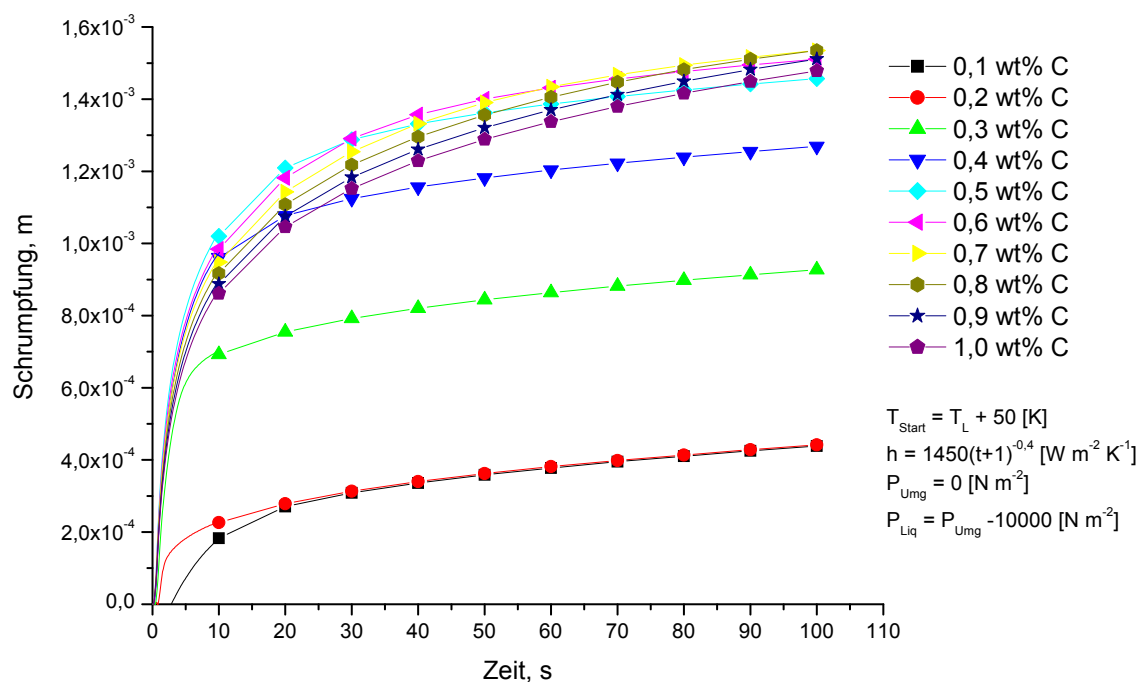


Abbildung 8.72: Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Eisekohlenstofflegierungen

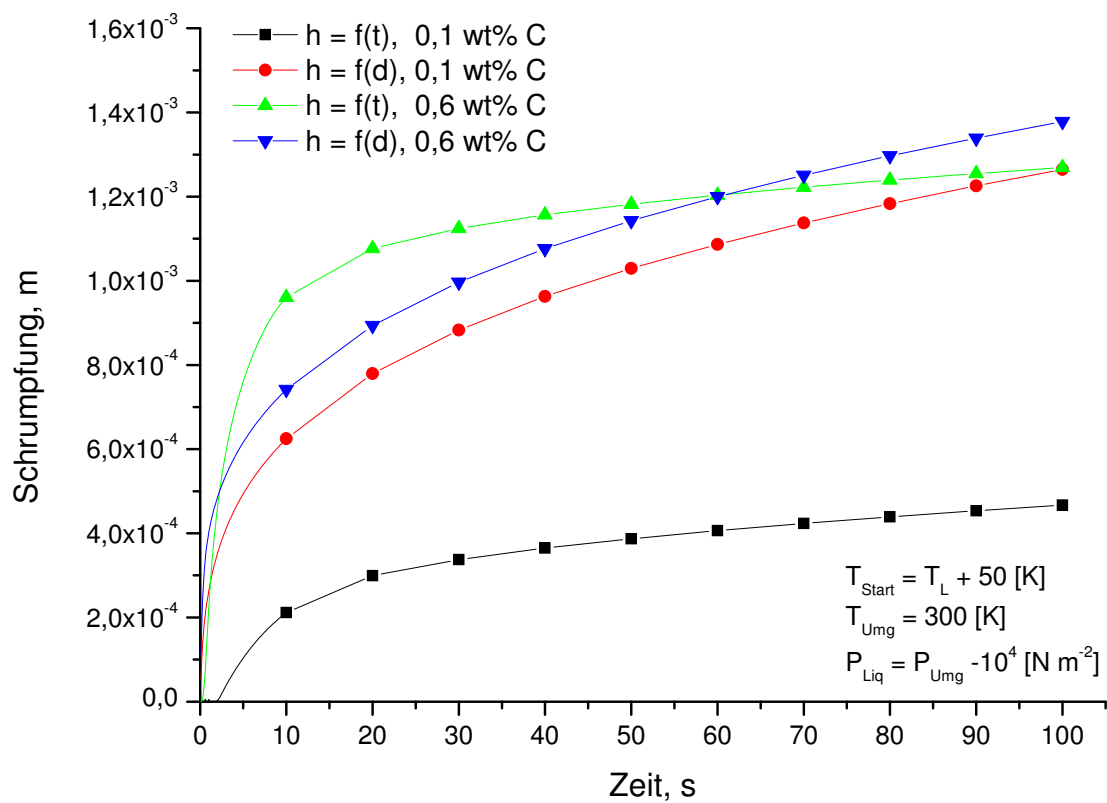


Abbildung 8.73: Vergleich von spalt- und zeitabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten

Das Diagramm (8.73) vergleicht für zwei Legierungen das Schrumpfungsverhalten mit zeit- und spaltabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten. Es ist zu erkennen, dass für die 0,1 wt% Kohlenstofflegierung das Schrumpfen mit spaltabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten viel höher ist als das mit zeitabhängigem. Während die Schale im letzteren Fall einige Sekunden an der Kokille anliegt, setzt das Schrumpfen mit spaltabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten sofort ein. Der Überdruck in der flüssigen Phase drückt die weiche Schale gegen die Kokillenwand, sodass mit spaltabhängiger thermischer Randbedingung schnell viel Wärme abtransportiert werden kann. Die Schale erreicht dadurch schneller eine höhere Festigkeit, um dem in der flüssigen Phase wirkenden Überdruck entgegenwirken zu können.

Die 0,6 wt% Kohlenstofflegierung schrumpft mit spaltabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten in den ersten Augenblicken wesentlich stärker als mit zeitabhängigem, da über den spaltabhängigen Wärmeübergangskoeffizient in den ersten Augenblicken wesentlich mehr Wärme abgeführt wird. Die 0,6 wt% Kohlenstofflegierung weist keine δ -Ferrit-Phase auf, sodass die thermische Kontraktion wegen des dichteren Austenits höher ist. Der Austenit ist zudem fester als die δ -Phase und kann dadurch mit größerer Kraft auf dem Innendruck der Schmelze entgegen wirken. Dadurch dass die Legierung stärker schrumpft, reduziert sich aber auch der Wärmeabtransport aus der Schale. Es ist im Diagramm zu erkennen, dass die Schrumpfungskurve mit spaltabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten zunächst unter der Kurve mit zeitabhängigem liegt.

Es ist in dem Diagramm (8.73) zu sehen, wie sich die Schrumpfungsverläufe beider Legierungen mit jeweils analoger thermischer Randbedingung gleichen. Sind die ersten Sekunden der Schrumpfung noch unterschiedlich, so verlaufen die Schrumpfen dann im weiteren Verlauf parallel. Erwartungsgemäß sind die Steigungen der Schrumpfungskurven abhängig von der Wärmemenge die aus der Schale abgeführt wird. Trotz der veränderten thermischen Randbedingung ist die Schrumpfung für die höher legierte Eisenkohlenstofflegierung größer. Die thermische Randbedingung ist zwar wichtig, um die Erstarrung des Rundblock richtig zu simulieren, erklärt aber nicht den im hydro-mechanischen Modell auftretenden Effekt, dass höher kohlenstoffhaltige Legierungen stärker schrumpfen als Legierungen mit δ - γ -Umwandlung. In den weiteren Untersuchungen wird daher wieder mit dem zeitabhängigen Wärmeübergangskoeffizient gerechnet.

8.4.3 Spannungsorientierte Analyse des Schrumpfungsverhaltens

Das Diagramm (8.74) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf und die Radialspannung nach zehn Sekunden für eine 0,1 und eine 0,6 wt% Kohlenstofflegierung. Die Radialgeschwindigkeit zeigt für beide Legierungen einen Bereich mit einem linearen Verlauf. Dieser Bereich kennzeichnet das Gebiet der flüssigen Phase. Es ist zu sehen, dass die Radialgeschwindigkeit der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung in der flüssigen Phase betragsmäßig größer ist als die Geschwindigkeit der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung. Eine größere negative radiale Verschiebung in der flüssigen Phase ist gleichbedeutend mit einem größeren Massenstrom aus der Radialebene heraus. Da für beide Legierungen der gleiche Druck in der flüssigen Phase wirkt, deutet die negative Radialverschiebung darauf hin, dass die Schale bei Legierungen mit größeren Kohlenstoffgehalten stärker auf die flüssige Phase drückt als bei Legierungen mit niedrigeren Kohlenstoffgehalten. Zusätzlich zu den Radialgeschwindigkeiten sind die Radialspannungen beider Legierungen in dem Diagramm dargestellt. Beide Radialspannungsverläufe gleichen sich im Verlauf, wobei die Spannung für die 0,6 wt% Kohlenstofflegierung größer ist. Die größere Zugspannung zeigt, dass die Schale der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung im höheren Maße als die 0,1 wt% Kohlenstofflegierung auseinandergezogen wird.

Das Diagramm (8.75) vergleicht den Dichteverlauf der 0,1 und der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung nach zehn Sekunden miteinander. Für alle Rechnungen gilt die Kondition, dass die Dichte mit Erreichen der Liquidustemperatur konstant ist für die flüssige Phase. Da die beiden Legierungen unterschiedliche Liquidustemperaturen haben, unterscheiden sich die Dichten in der flüssigen Phase leicht voneinander. Das Schrumpfungsverhalten der Schale wird aber nicht durch die Absolutwerte der Dichte bestimmt, sondern durch die relative Änderung der Dichte im Laufe der Abkühlung. Es ist aus dem Diagramm zu erkennen, dass die Dichte der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung schneller zunimmt als die Dichte der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung. Die thermische Kontraktion ist demnach für die 0,1 wt% Kohlenstofflegierung größer, was einer stärkeren Schrumpfung entsprechen müsste. Die Dichtezunahme der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung ist flacher, was durch die höhere radiale Zugbelastung zu erklären ist.

In dem Diagramm (8.75) ist aber nicht nur die ausgerechnete Dichte ρ für beide Legierungen aufgetragen, sondern auch die zu erfüllende Dichte ρ^{th} , die durch die thermodynamische Dichte ρ_0^{th} und den Druck bestimmt wird. Es ist zu erkennen, dass in beiden Fällen die Dichte stets der vorgegebenen Dichte entspricht und somit den geforderten thermodynamischen Zustand erreicht. Es ist auch zu erkennen, dass der Spannungszustand während dieses Stadiums der Erstarrung keinen sichtbaren Einfluss auf die thermodynamische Dichte hat. Ein numerischer Einfluss auf die Schrumpfungsergebnisse durch ungenau ausgerechnete Dichtezustände kann ausgeschlossen werden.

Die Diagramme (8.76) und (8.77) vergleichen die Tangentialspannungen beider Legierungen miteinander. Zusätzlich zu den Tangentialspannungen sind die jeweiligen Phasenanteile und die Dichte der Legierung dargestellt. Das Diagramm (8.76) zeigt den Spannungszustand der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung. Es ist zu erkennen, dass im Erstarrungsintervall sowie in den anschließenden Dreiphasengebiet und δ und γ -Gebiet Zugspannungen herrschen. Die Zugspannung nimmt im δ und γ -Gebiet kontinuierlich zu und springt beim Erreichen des homogenen γ -Gebiets in eine Druckspannung über.

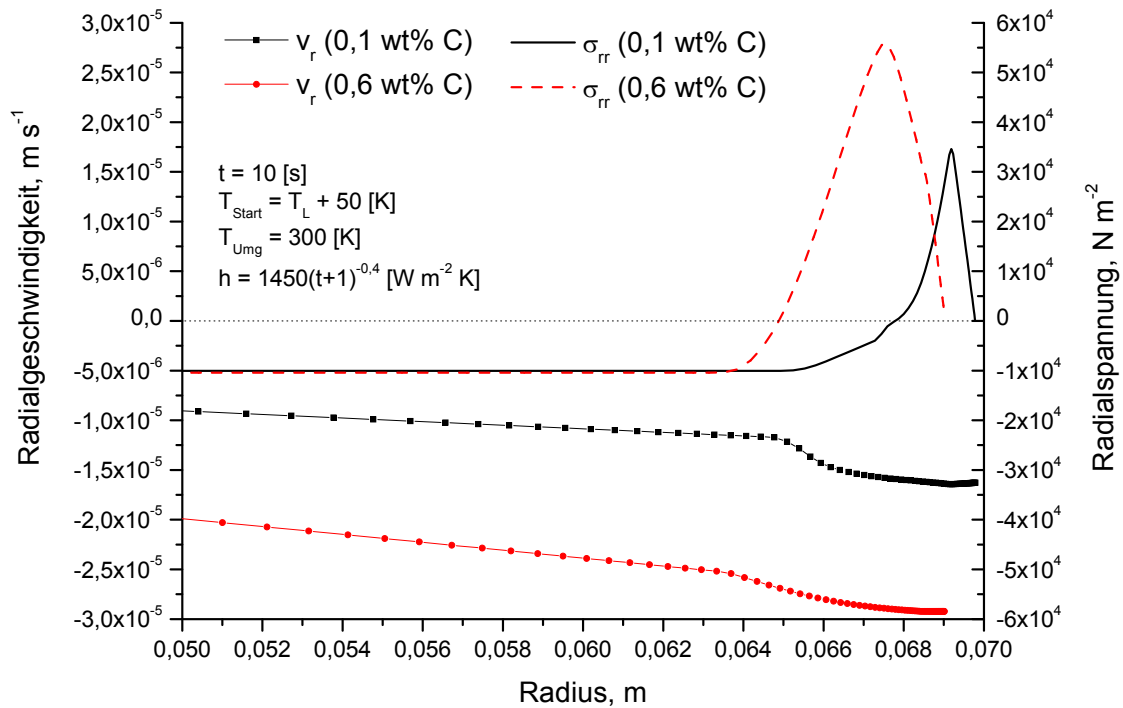


Abbildung 8.74: Vergleich von Radialspannung und -geschwindigkeit, 0,1 und 0,6 wt% C

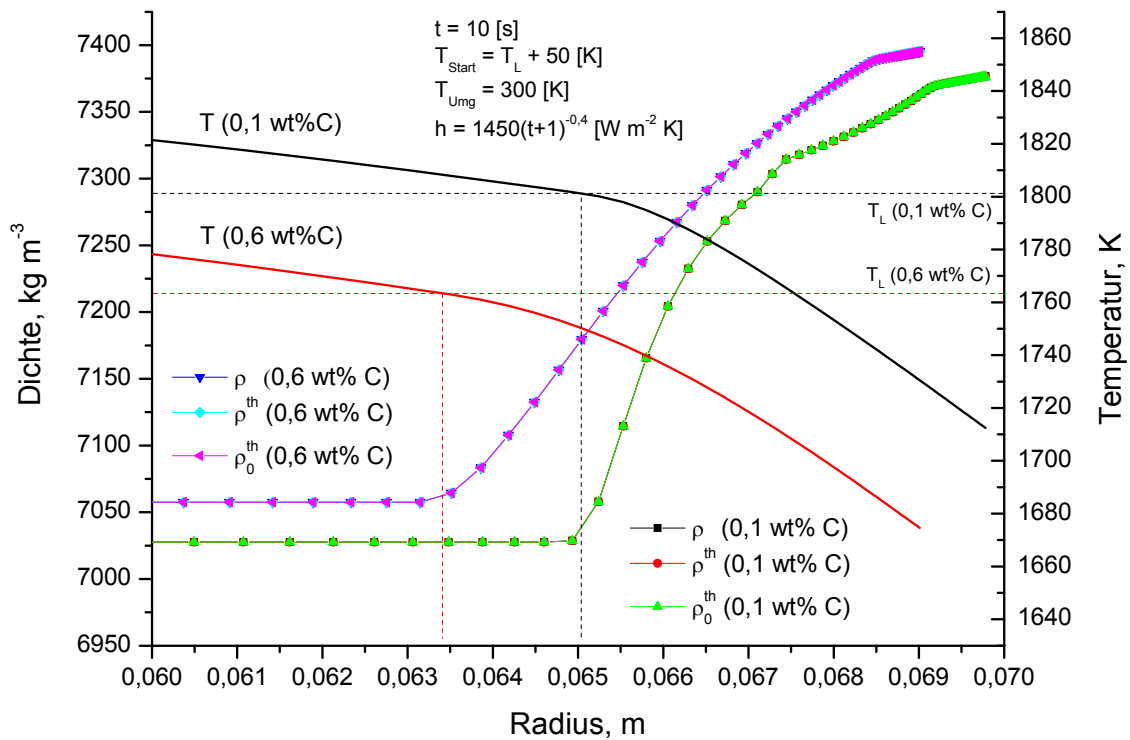


Abbildung 8.75: Vergleich von Dichte- und Temperaturverlauf, 0,1 und 0,6 wt% C

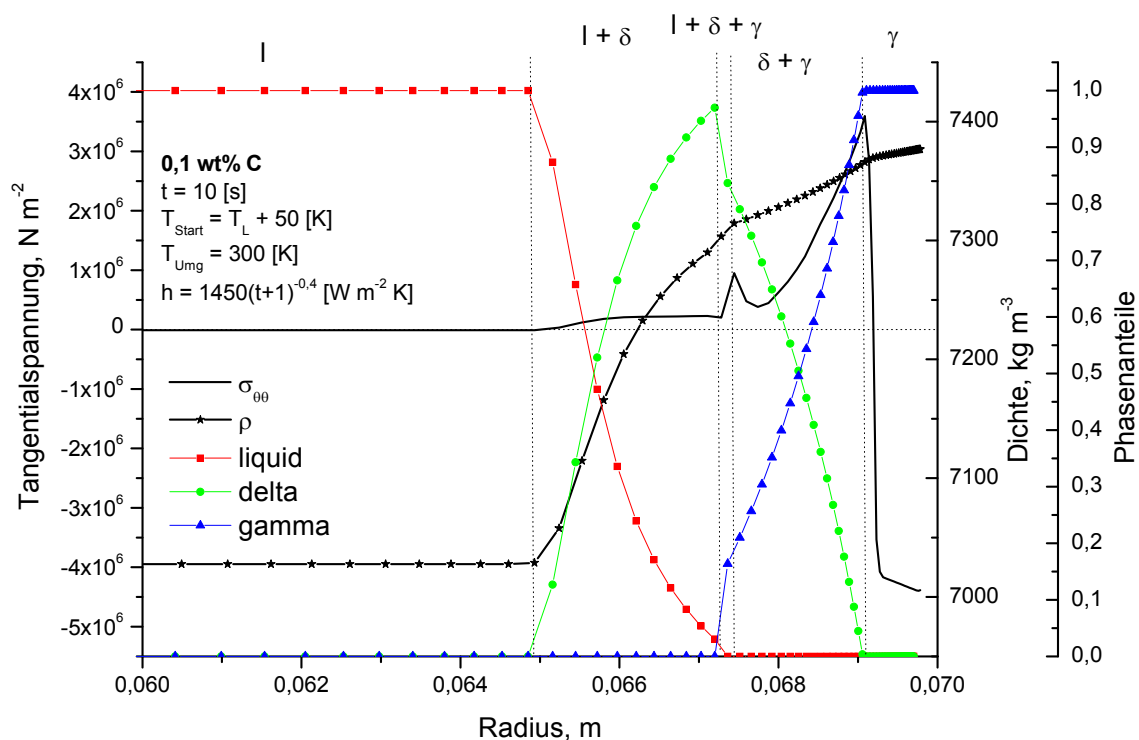


Abbildung 8.76: Tangentialspannung und Phasen, 0,1 wt%C

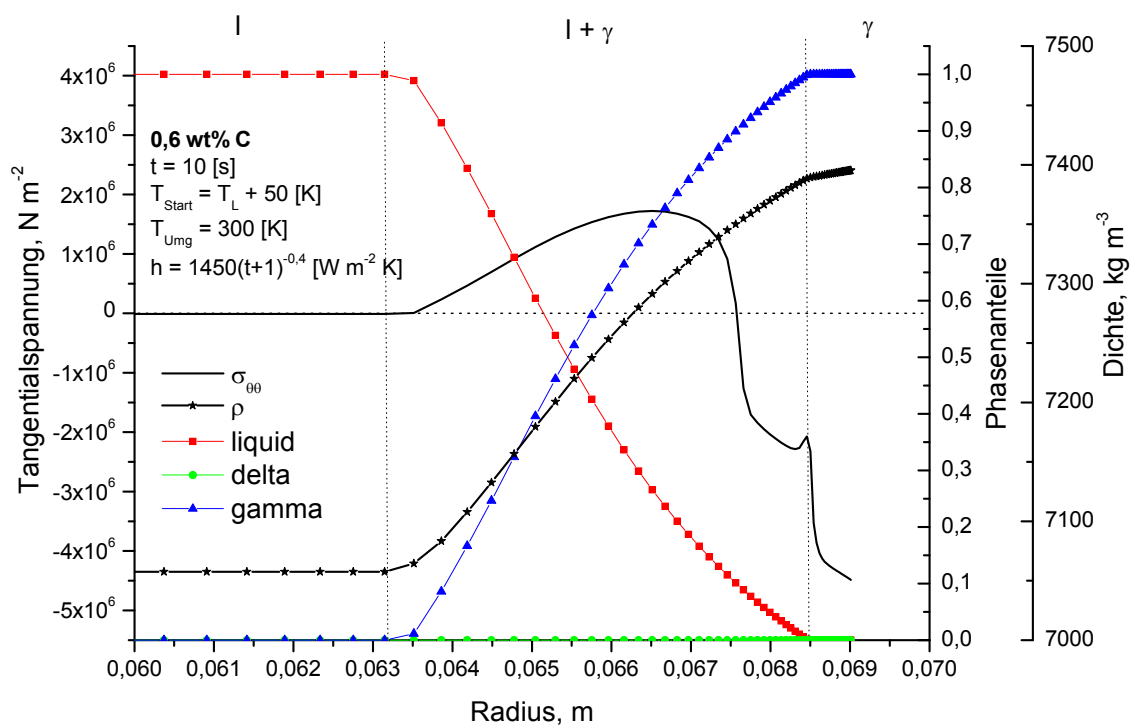


Abbildung 8.77: Tangentialspannung, Phasen und Dichte, 0,6 wt%C

Die Diagramme (8.76) und (8.77) sind gleich skaliert, damit ein direkter Vergleich beider Tangentialspannungsverläufe möglich ist. Es ist zu erkennen, dass die Tangentialspannung der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung im Erstarrungsintervall sehr große Werte annimmt, zudem entstehen die Spannungen schon bei sehr geringen Festphasenanteilen. Es gilt für den Austenit ein anderes Materialgesetz als für den δ -Ferrit. Der Austenit existiert bei niedrigeren Temperaturen und ist fester, sodass der Elastizitätsmodul größer und das Fließgesetz zäher ist. Das Materialmodell bewirkt dadurch, dass im Erstarrungsintervall zu hohe Spannungen auftreten. Die Spannungen weiten das Erstarrungsintervall auf, indem der heterogene Bereich mit zu viel Kraft auf die flüssige Phase wirkt.

Die Interpretation des Spannungsverlaufs ist mit dem Dichteverlauf möglich. Es ist aus dem Dichteverlauf zu erkennen, dass die Steigung des Dichteverlaufs mit Annäherung an den äußeren Rand in den einzelnen Phasengebieten abnimmt. Am äußeren Rand ist wegen der kleinsten Steigung die thermische Kontraktion am geringsten. Mit fortschreitender Zeit nehmen nicht nur die Dichteänderungen ab, sondern auch der Temperaturgradient, was ebenfalls die thermische Kontraktion des äußeren Bereichs reduziert. Im Inneren gelten die umgekehrten Effekte, also ein hoher Temperaturgradient und steile Dichteverläufe, sodass die thermische Kontraktion dort hoch ist. Stellt man sich den inneren und äußeren Bereich der erstarrenden Schale als zwei voneinander entkoppelte Ringe vor, so würde der innere Ring von dem äußeren Ring wegen der höheren thermischen Kontraktion wegschrumpfen. Eine Kopplung zum äußeren Ring ist dann nur möglich, wenn der innere Ring aufgeweitet wird, was für die Tangentialspannungen Zugbelastungen bedeutet. Der äußere Ring kontrahiert zwar weniger, ist aber fester, sodass für den äußeren die Tangentialspannungen negativ sind. Der äußere Ring wird zusätzlich durch den zwanghaft aufgeweiteten inneren Ring unter Druck gesetzt.

Im Diagramm (8.76) passt die Modellvorstellung zur Interpretation der Spannungsverläufe, wenn sich mehrere Ringe vorgestellt werden, die an den äußeren Ring drangehängt werden. Der Sprung im Spannungsverlauf ist durch die Phasenübergänge erklärbar, da die Dichteänderung beim Phasenübergang schlagartig ihre Steigung ändert. Das Diagramm (8.77) zeigt den Tangentialspannungsverlauf der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung, für die auch Druckspannungen im äußeren Bereich gelten und ein Wechsel von Zug- zu Druckspannungen stattfindet. Im Gegensatz zur 0,1 wt% Kohlenstofflegierung springt die Tangentialspannung aber nicht in den Druckbereich hinein, sondern strebt einen kontinuierlichen Übergang an. Beim Phasenübergang tritt wieder eine Spannungsspitze auf, die auf die abrupte Änderung im Dichteverlauf zurückzuführen ist. Die Spannungsverläufe zeigen, bis auf die abrupten Änderungen bei den Phasenübergängen einen richtigen Verlauf. Allein die Größenordnung der Spannung der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung übt einen zu hohen Einfluss auf die Schrumpfung aus.

Das Diagramm (8.78) zeigt in der gleichen Darstellung wie das Diagramm (8.77) die Tangentialspannung mit den Phasenverläufen der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung. Anstelle der Dichte ist aber nun der Druck zusätzlich aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass der Druck im Erstarrungsintervall konstant bleibt. Erst mit Erreichen der Phasengrenze baut sich ein Druck auf, der dann schlagartig in den Druckbereich springt. Der spitze Phasenübergang ist auf den nicht kontinuierlichen Dichteübergang zurückzuführen.

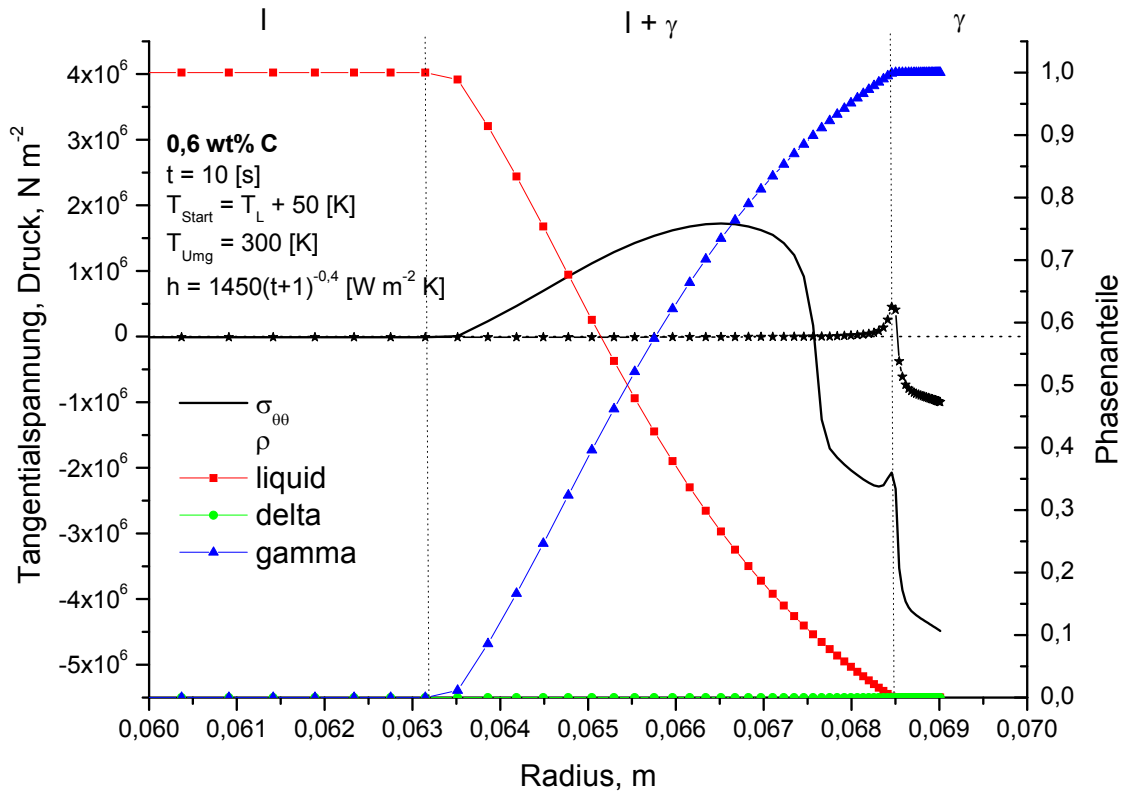


Abbildung 8.78: Tangentialspannung, Phasen und Druck, 0,6 wt%C

Der konstante Druckverlauf im Diagramm (8.78) ist eine Folge der Modellierung des axialen Massenstroms. Im Erstarrungsintervall treten aber schon Dichteänderungen auf, die eigentlich einen Unterdruck erzeugen würden, um fehlendes Material zur Speisung anzuziehen. Der Schmelzdruck wird aber zwanghaft konstant gehalten und entspricht nicht mehr dem Druck des Gemisches, sodass die gewollten Druckänderungen von den Spannungen aufgenommen werden und zu anderen Spannungsverläufen führen. Der Tangentialspannungsverlauf beispielsweise wechselt noch vor Erreichen der Phasengrenze des homogenen γ -Gebiets von Zug- auf Druckspannung.

Die Diagramme (8.79) und (8.80) zeigen anhand der Axialdehnungsgeschwindigkeiten der beiden Legierungen die Auswirkungen der Modellierung der axialen Massenbewegung auf die Massenströme im heterogenen Gebiet. Die Axialdehnungsrate ist sowohl in der reinen festen als auch in der reinen flüssigen Phase konstant und erfüllt damit die geforderte Kondition für beide Bereiche. Mit Beginn der Erstarrung setzt die Verdichtung ein und der Bedarf an Masse steigt. Die Speisung dieses Massebedarfs erfolgt in sehr großem Maße aus axialer Richtung, was durch die extrem negative Axialdehnungsgeschwindigkeit zu sehen ist. Im Erstarrungsintervall dominiert die Kondition zur Modellierung des axialen Massenstroms in der flüssigen Phase, die beliebig Masse verschiebt bis der geforderte Druck eingestellt ist. Für die flüssige Phase ist es also möglich Masse nachströmen zu lassen. Die hohen Fließbewegungen im heterogenen Gebiet werden aber auch von der festen Phase aufgenommen, die dadurch unrealistisch hohe Spannungen aufbaut. Dieser Effekt, verstärkt durch einen höheren Elastizitätsmodul und einer höheren Viskosität, erzeugt unrealistisch hohe Schrumpfungen.

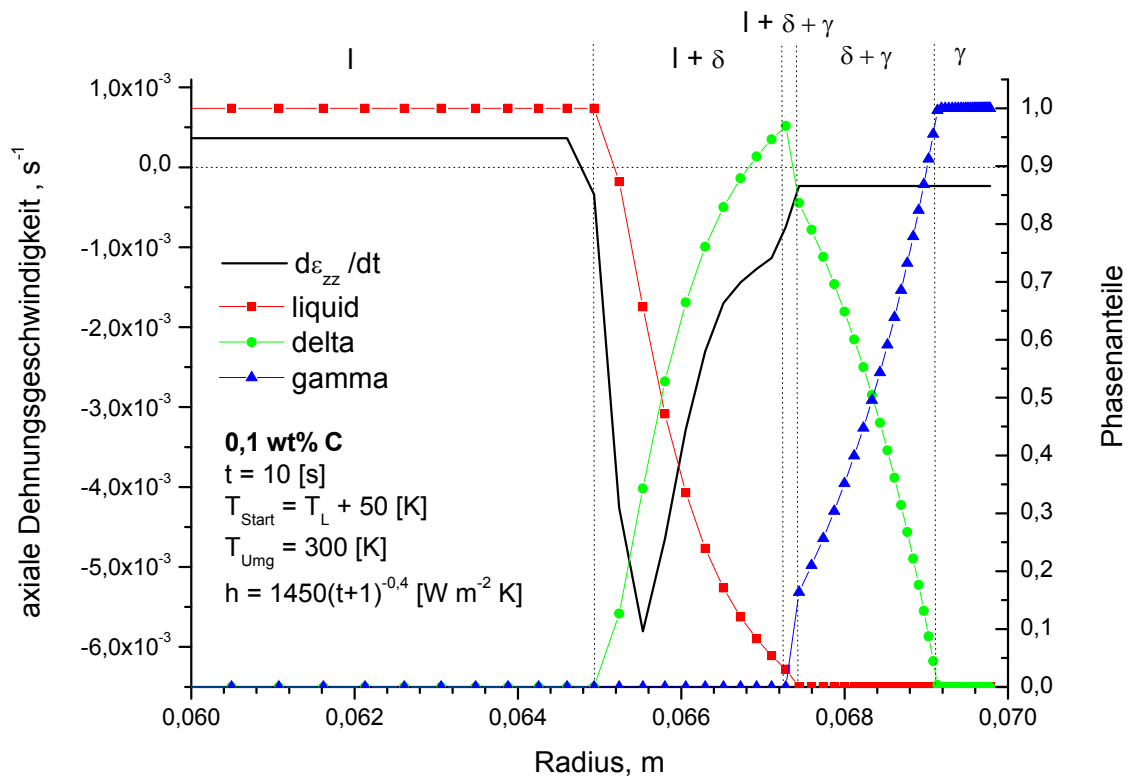


Abbildung 8.79: Axialdehnrate und Phasenanteile, 0,1 wt%C

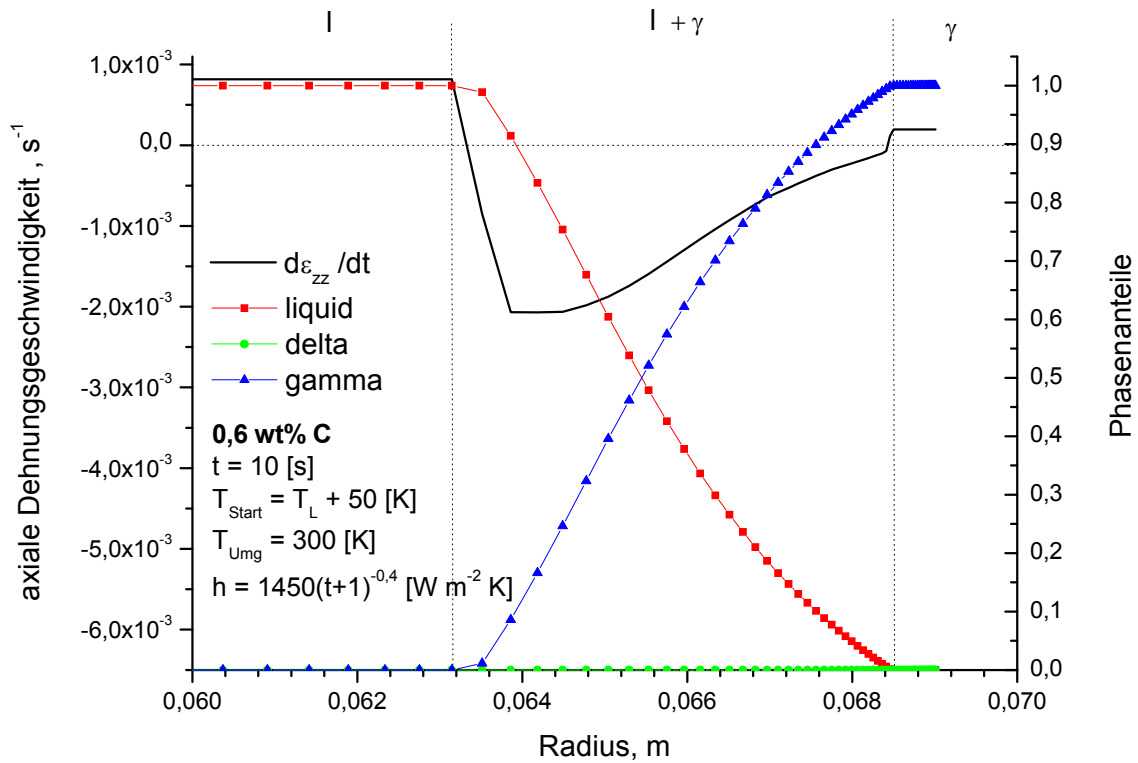


Abbildung 8.80: Axialdehnrate und Phasenanteile, 0,6 wt%C

8.4.4 Erstarrungsrechnung mit konstanten Proportionalitätsvariablen

Es sind dazu Erstarrungsrechnungen für unterschiedliche Eisenkohlenstofflegierungen mit gleichen und konstanten Proportionalitätsvariablen durchgeführt worden. Sie ermöglichen es, das Spannungs- und Schrumpfungsverhalten der Legierungen unabhängig von den Materialgesetzen zu beurteilen. Aus diesem Grund ist je eine Rechnung für eine 0,1 wt% und eine 0,6 wt% Kohlenstofflegierung mit den in der Tabelle (8.4) aufgeführten konstanten Proportionalitätsvariablen durchgeführt worden. Alle anderen Materialparameter sowie die Anfangs- und Randbedingungen entsprechen denen der vorangegangenen Rechnungen.

Phase	l	δ	γ	α
Elastizitätsmodul $[\text{N m}^{-2}]$	10^{12}	10^{12}	10^{12}	10^{12}
Viskosität $[\text{s N m}^{-2}]$	10^{06}	10^{10}	10^{12}	10^{12}

Tabelle 8.4: Konstante Proportionalitätsvariablen der Erstarrungsrechnung

Das Diagramm (8.81) vergleicht das Schrumpfungsverhalten der 0,1 wt% und 0,6 wt% Kohlenstofflegierung für Rechnungen miteinander, bei denen zum einen konstante und zum anderen temperaturabhängige Proportionalitätsfaktoren eingesetzt worden sind. Es kommt ein deutlich höheres Schrumpfungsverhalten bei den Rechnungen mit konstanten Materialparametern heraus. Zudem zeigt sich, dass die Schrumpfkurve der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung unterhalb der Kurve der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung liegt. Die Art und Weise wie die Festigkeit der Strangschale durch die Materialgesetze modelliert wird, hat demnach einen deutlichen Einfluss auf das Schrumpfungsverhalten der Legierung.

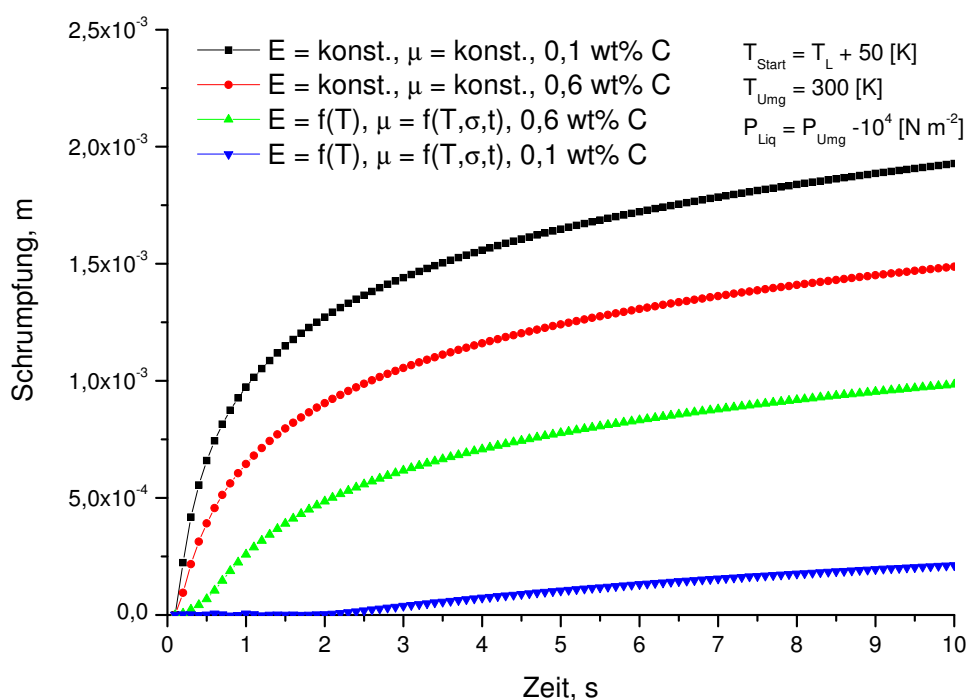


Abbildung 8.81: Variation Schrumpfung konstante Proportionalitätsvariablen

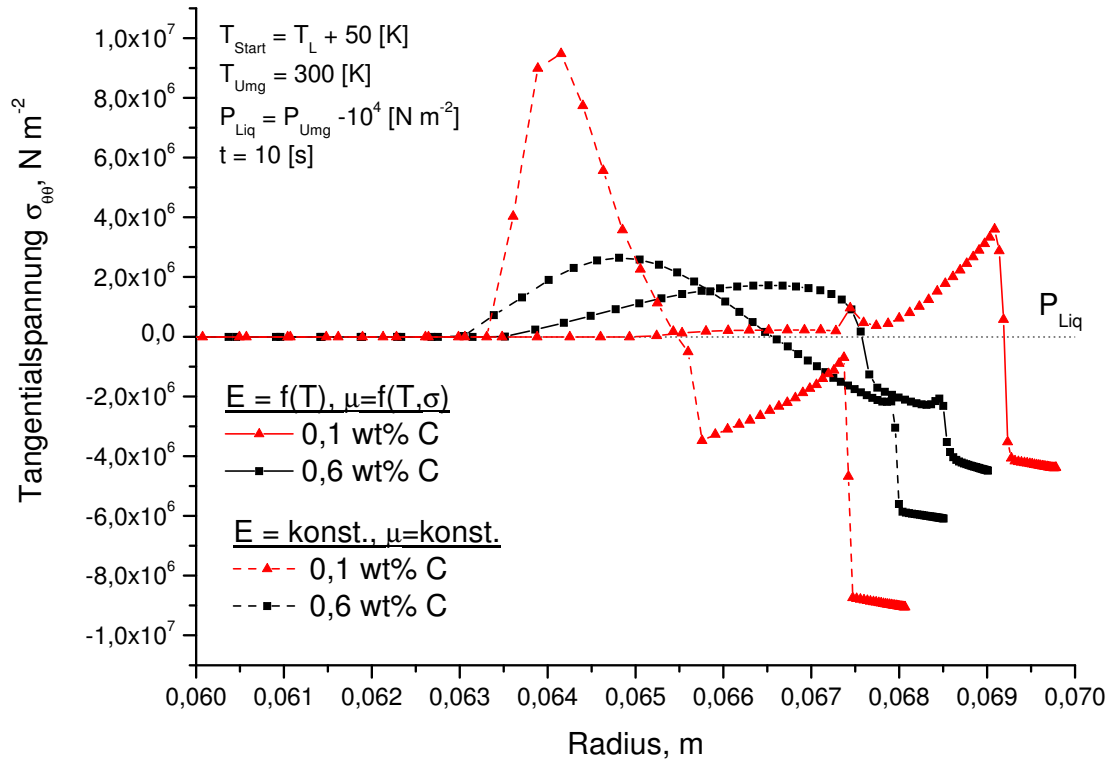


Abbildung 8.82: Variation Tangentialspannung konstante Proportionalitätsvariablen

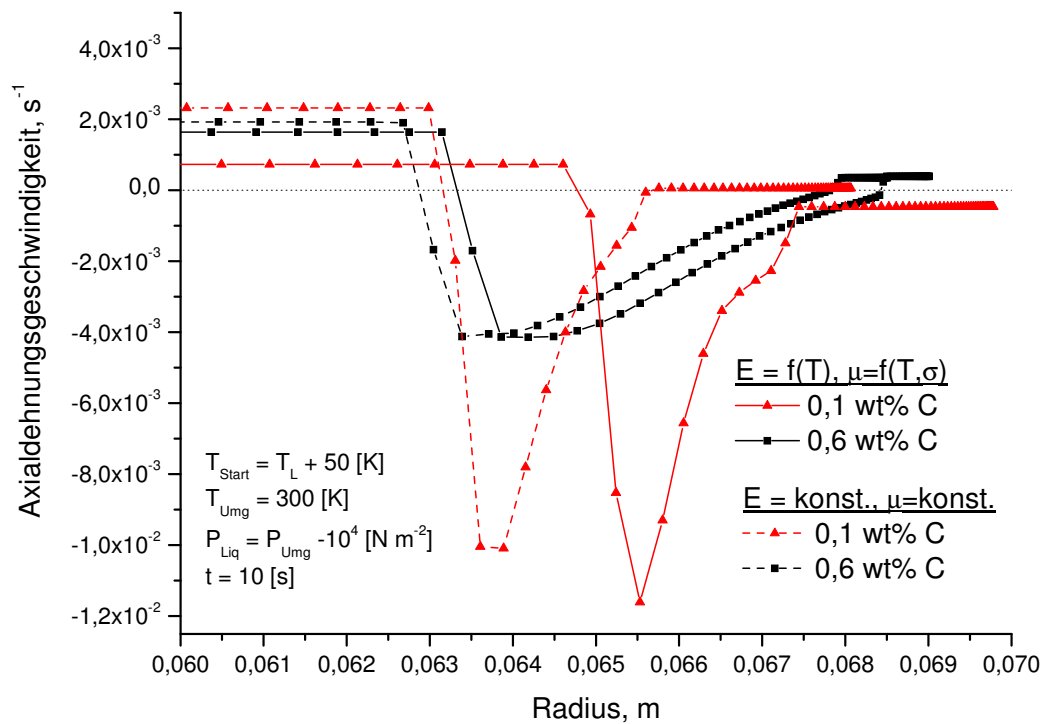


Abbildung 8.83: Variation Axialdehnungsrate konstante Proportionalitätsvariablen

Das Diagramm (8.82) vergleicht für die vier Fälle die Tangentialspannung nach zehn Sekunden miteinander. Während die Tangentialspannungen der 0,6 wt% Kohlenstofflegierung in ihrer Größenordnung und in ihrem Verlauf sehr ähnlich zueinander sind, unterscheiden sich die Tangentialspannungen der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung in ihrer Größenordnung erheblich voneinander. Die Tangentialspannung der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung aus der Rechnung mit temperaturabhängigen Variablen weicht im Erstarrungsintervall nur sehr wenig vom Schmelzendruck ab. Dagegen nimmt die Spannung für die Rechnung mit konstanten Variablen extrem hohe Werte im Erstarrungsintervall an. Diese hohen Spannungen drücken mit größerer Kraft auf die Schmelze, sodass die Legierung am stärksten schrumpft. Es ist außerdem zu sehen, dass die hohen Spannungen im Erstarrungsintervall zu einer Verschiebung der Lastart im Randbereich führen. In der Rechnung mit temperaturabhängigen Variablen bauen sich Zugspannungen auf, die dann sprunghaft in Druckspannungen wechseln. Die Tangentialspannung im anderen Fall zeigt für den Randbereich zwar den gleichen sprunghaften Verlauf, nur ist dieser komplett in den Druckbereich verschoben.

Das Diagramm (8.83) zeigt für alle vier Erstarrungsrechnungen die Axialdehnungsgeschwindigkeiten nach zehn Sekunden. Die Axialdehnungsgeschwindigkeiten der 0,6 wt% und die der 0,1 wt% Kohlenstofflegierung sind für die Rechnung mit konstantem und temperaturabhängigen Proportionalitätsvariablen sehr ähnlich, obwohl die Spannungsverläufe unterschiedlich zueinander sind. Die Axialdehnungsgeschwindigkeiten der jeweiligen Legierung sind nur zueinander verschoben, da andere Spannungen in der erstarrenden Schale zu unterschiedlichen Schrumpfungen führen. Dass andere Kräfte auf die Schmelze wirken, ist auch in den unterschiedlichen Axialdehnungsgeschwindigkeiten in der flüssigen Phase zu erkennen. Die Axialbewegung im Erstarrungsintervall ist demnach weniger durch die Festigkeit der festen Phase als durch die Dichteänderungen im Erstarrungsintervall und den Druck in der flüssigen Phase bestimmt.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Die Arbeit hat das Ziel verfolgt ein thermo-mechanisches Spannungsmodell zu entwickeln, bei dem die Modellierung der flüssigen Phase unabhängig von Sonder- oder Randbedingungen ist. Dafür ist in Zusammenhang mit Spannungsrechnungen bei Erstarrungsvorgängen ein hydro-mechanischer Ansatz theoretisch formuliert und in einem vereinfachten Modell getestet worden. Es ist ein zweites Ziel dieser Arbeit gewesen, den Unterschied einer massenkonsistenten Spannungsrechnung zu bewerten. Die gleichzeitige Erfüllung der Massen- und Impulsbilanz durch die Druck-Korrektur-Methode führt zu einer massenkonsistenten Beschreibung der thermo-mechanischen Zustandsänderungen.

Das hydro-mechanische Spannungsmodell ist zunächst mit Ergebnissen aus dem FEM-Programm ABAQUS anhand von Abkühlungsrechnungen, sowie mit einer analytischen Lösung eines Wärmespannungsproblems verglichen worden. Diese Vergleiche ermöglichten es, die für das hydro-mechanische Modell gewählte Lösungsprozedur überprüfen zu können. Des Weiteren ermöglichten die Vergleiche, das im hydro-mechanischen Modell formulierte Materialmodell zu überprüfen. In diesem Materialmodell gilt eine deviatorische Formulierung der Materialgesetze, sowie eine Übertragung der Kompressibilität aus den Materialgesetzen auf die Dichte. Die Vergleiche haben gezeigt, dass die entwickelten und im hydro-mechanischen Modell umgesetzten Methoden, die Spannungszustände übereinstimmend zu den Referenzfällen ausrechnen. Es kann daher zuerst gesagt werden, dass es mit Hilfe der Druck-Korrektur-Methode möglich ist, Spannungen in einem hydro-mechanischen Modell auszurechnen.

Im zweiten Schritt sind für Abkühlungsrechnungen mit den Ergebnissen aus dem FEM-Programm ABAQUS die Unterschiede im Spannungsbild des strukturmechanischen und des hydro-mechanischen Ansatzes bewertet worden. Das aus dem hydro-mechanischen Modell resultierende Verschiebungsfeld ist generell unabhängig von den Materialgesetzen und bildet daher thermo-mechanische Zustandsänderungen konsequent ab. Der Vergleich zwischen strukturmechanischer und hydro-mechanischer Methode bei der Berechnung der thermo-mechanischen Zustandsänderungen zeigt, dass große Dichteänderungen und niedrigviskoses Fließen zu größeren Abweichungen im Verschiebungsfeld im strukturmechanischen Ansatz führen. Die durch die Verschiebungsunterschiede auftretenden Abweichungen in den Spannungen sind für niedrigviskose Materialien sichtbar und deutlich. Der generelle Verlauf ist aber gleich.

Im dritten Schritt ist das Druckprofil und das Schrumpfungsverhalten von Eisenkohlenstofflegierungen für Erstarrungsvorgänge untersucht worden. Die Anwendung des hydro-mechanischen Modells bei Spannungsrechnungen für Erstarrungsvorgänge zeigt, dass das Modell erfolgreich

unterschiedliche Phasen miteinander kombinieren kann, gerade in Hinsicht auf das gleichzeitige Vorhandensein von fester und flüssiger Phase. Der Druck in der flüssigen Phase kann verschiebungsunabhängig vorgegeben werden und somit den Ausgangsspannungszustand bei Erstarrungsrechnungen bilden. Die Untersuchungen ergeben, dass die Modellierung des Drucks in der flüssigen Phase weitestgehend den physikalischen Vorstellungen entsprechen. Um den hydrostatischen Druck in der flüssigen Phase modellieren zu können, unterscheidet das hydro-mechanischen Modell zwischen axialen Massenaustausch für feste und flüssige Phase, um so druckausgleichende Strömungen in der flüssigen Phase zu ermöglichen.

Die Aufteilung von Axialbewegungen ist für strukturmechanische Modelle, bei denen der verallgemeinerte ebene Dehnungszustand gilt, nicht möglich. Auch ein Druckaufbau in der flüssigen Phase bei Modellen, für die der ebene Dehnungszustand gilt, ist nicht möglich, da die flüssige Phase keine Spannungen aufnehmen darf und somit auch kein Druck existiert. Es ist bei ABAQUS prinzipiell möglich Bereiche mit flüssiger Phase mit hydrostatischen Elementen zu modellieren, mit denen dann Drücke in der flüssigen Phase bestimmt werden können. Das Gebiet der flüssigen Phase ändert sich bei Erstarrungsrechnungen jedoch ständig, was auch einen ständigen Wechsel von Elementtypen sowohl für das Gebiet der flüssigen als auch für das Gebiet der festen Phase zur Folge hätte, und damit eine Anwendung von hydrostatischen Elementen unmöglich macht.

Die Untersuchung des Schrumpfungsverhaltens einer reinen Eisekohlenstofflegierung mit 0,1 wt% C zeigt, dass die Schrumpfungskurven aus dem hydro-mechanischen Modell und gemessene Schrumpfungswerte gut miteinander vergleichbar sind. Die gemessenen Schrumpfungen genau nachzurechnen hängt von der richtigen Wahl des Schmelzendrucks und der richtigen thermischen Randbedingung ab und ist somit zunächst eine Frage der richtigen Parameterwahl. Ein Vergleich von unterschiedlichen Eisenkohlenstofflegierungen mit gleichen Randbedingungen offenbart im vereinfachten hydro-mechanischen Modell jedoch, dass das berechnete Schrumpfungsverhalten nicht den gemessenen Werten entspricht. Nach dem hydro-mechanischen Modell schrumpfen höher kohlenstoffhaltige Eisenkohlenstofflegierungen stärker als niedrig kohlenstoffhaltige. Das erhöhte Schrumpfungsverhalten höher kohlenstoffhaltiger Legierungen ist durch zwei Phänomene verursacht. Zum einen nimmt das Material im Erstarrungsintervall sofort mit Bildung einer festen Phase Spannungen auf. Zum anderen resultieren aus der Übergangsmodellierung des axialen Massenstroms von flüssiger zu fester Phase sehr hohe Axialdehnungsgeschwindigkeiten. Die Physik wird durch die zwei Phänomene im Erstarrungsintervall nicht richtig abgebildet, was sich in den unerwarteten Schrumpfungsverhalten widerspiegelt.

Die Modellierung des Übergangs der axialen Massenströme von flüssiger zu fester Phase ist ein erster Ansatz, der bis jetzt noch in keinem anderen Modell angewendet worden ist. Eine erste Korrektur dieses Ansatzes könnte sein, das Spannungsmodell im Erstarrungsintervall den erhöhten Axialbewegungen anzupassen. Es ist denkbar, das für jede Phase vorliegende elastisch-viskoplastische Materialverhalten im Vergleichsmodell mit einem zusätzlichen Element im Erstarrungsintervall zu erweitern. Das zusätzliche Element muss die hohen Dehnraten aufnehmen und gleichzeitig die auftretenden Spannungen sofort abbauen können, damit sich im Erstarrungsintervall keine hohen Spannungen aufbauen können. Ein anderer Ansatz könnte sein, den vereinfachten Ansatz zur Modellierung des Übergangsbereichs zu verwerfen. Physikalischer ist es in der Modellierung, zwei voneinander unabhängige Geschwindigkeitsfelder im Erstarrungsintervall zu unterscheiden. Das eine Geschwindigkeitsfeld modelliert die Bewegun-

gen der flüssigen Phase und das andere das Kontraktionsverhalten der erstarrenden Schale. Die zwei Geschwindigkeitsfelder müssten aber zu einem zusammengefasst werden, um die Masse richtig bilanzieren zu können.

Die hydro-mechanische Modellierung von Erstarrungsvorgängen kombiniert in einem ersten und einfachen Ansatz das Gebiet der flüssigen und festen Phase miteinander. Die physikalischen Vorgänge in diesen Gebieten sind bisher immer mit zwei unterschiedlichen kontinuumsmechanischen Modellen berechnet worden. Die Kombination dieser beiden Bereiche wird seit längerem angestrebt, indem beide kontinuumsmechanischen Modelle in einem Programmpaket berücksichtigt und so miteinander kombinierbar werden. Es ist bisher aber noch nicht versucht worden, beide Gebiete mit einem kontinuumsmechanischen Modell zu berechnen. Das hydro-mechanische Modell bietet dafür einen grundlegenden Ansatz. Es sind in dem Modell zwar keine Strömungen im eigentlichen Sinne modelliert worden, jedoch ist es gelungen die Spannungsrechnung mit einer Methode durchzuführen, die Basis der Strömungsmechanik ist. Der nächste Entwicklungsschritt ist daher, den hydro-mechanischen Ansatzes in einem Programm für Strömungssimulationen zu implementieren. Es könnten dann die Strömungsfelder beim Strangguss durch die Strangabzugsgeschwindigkeit von 1 - 3,3 m/min bei der Spannungsrechnung berücksichtigt werden.

Anhang A

Materialmodell

A.1 Herleitung druckbedingter Dichteinfluss

Es gilt die Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (\text{A.1})$$

Die grundlegende Fragestellung ist, wie sich die Dichte mit dem Druck entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{m}{V} \right) = m \frac{\partial V^{-1}}{\partial P} \\ &= m \cdot V^{-2} \frac{-\partial V}{\partial P} \\ &= \frac{m}{V} \left(-\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \right) \\ &= \frac{m}{V} \kappa = \rho \kappa \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

umstellen ergibt

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (\text{A.3})$$

wird die Gleichung aufintegriert so folgt

$$\int_{P_0}^P \kappa dP = \int_{P_0}^P \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} dP \quad (\text{A.4})$$

Für die linke Seite folgt

$$\int_{P_0}^P \kappa dP = \kappa \cdot \Delta P \quad (\text{A.5})$$

und für die rechte

$$\int_{P_0}^P \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} dP = \int_{\rho(P_0)}^{\rho(P)} \frac{1}{\rho} d\rho = \ln(\rho) - \ln(\rho_0) \quad (\text{A.6})$$

und somit ergibt sich

$$\kappa \cdot \Delta P = \ln(\rho) - \ln(\rho_0) = \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (\text{A.7})$$

und schließlich der gesuchte Ausdruck

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\kappa \cdot \Delta P} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Spannungstensor für Newtonsche Fluide

Es gilt der Spannungstensor für Newtonsche Fluide in Zylinderkoordinaten:

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.15})$$

Der Divergenzterm $(\nabla \cdot v)$ entspricht dem volumetrischen Dehnungsratenanteil, der die Gesamtdehnungsrate korrigiert, sodass der deviatorische Dehnungsratenanteil resultiert. Gelten die Kompatibilitätsbedingungen in der Form:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

und des Weiteren Rotationssymmetrie ($v_\theta = 0$), so folgt für die Normalspannungen ein allgemeines viskoses Materialgesetz:

$$\tau_{rr} = -2\mu (\dot{\epsilon}_{rr} - \dot{\epsilon}^v) = -2\mu \dot{\epsilon}_{rr}^d \quad (\text{A.17})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\mu (\dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \dot{\epsilon}^v) = -2\mu \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^d \quad (\text{A.18})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu (\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}^v) = -2\mu \dot{\epsilon}_{zz}^d \quad (\text{A.19})$$

Die übrigen Spannungsterme sind für das hier modellierte Problem nicht relevant.

A.3 Herleitung Schubspannung des Mehrphasengefüges

A.3.1 Materialgesetz für lineare Elastizität

Das Materialgesetz für lineare Elastizität lässt sich formal ableiten:

$$\dot{\varepsilon}_{ij,I}^{el,d} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\tau_{ij,I}}{E_I} \right) = -\frac{d}{dt} (\tau_{ij,I} \cdot E_I^{-1}) \quad (\text{A.20})$$

$$= - \left(\frac{\partial \tau_{ij,I}}{\partial t} \cdot E_I^{-1} + \frac{\partial E_I^{-1}}{\partial t} \cdot \tau_{ij,I} \right) \quad (\text{A.21})$$

und anschließend kann die zeitliche Entwicklung des Elastizitätsmoduls linear diskretisiert werden:

$$\dot{\varepsilon}_{ij,I}^{el,d} \approx - \left(\frac{\Delta \tau_{ij,I}}{\Delta t} \cdot E_I^{-1} + \frac{\Delta E_I^{-1}}{\Delta t} \cdot \tau_{ij,I}^{ti+1} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\approx - \left(\frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{\Delta t E_I} - \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I} + \frac{\Delta E_I^{-1}}{\Delta t} \cdot \tau_{ij,I}^{ti+1} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\approx - \left(\frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{\Delta t} \left(\frac{1}{E_I} + \Delta E_I^{-1} \right) - \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I} \right) \quad (\text{A.24})$$

sodass letztendlich:

$$\dot{\varepsilon}_{ij,I}^{el,d} \approx - \left(\frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{\Delta t} \left(\frac{2}{E_I^{ti+1}} - \frac{1}{E_I^{ti}} \right) - \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right) \quad (\text{A.25})$$

A.3.2 Materialgesetz für Viskosität

Das Materialgesetz für die Viskosität setzt Dehnungsrate und Schubspannung in Relation und braucht nicht weiter entwickelt zu werden.

$$\dot{\varepsilon}_{ij,I}^{cr,d} = -\frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{2 \mu_I} \quad (\text{A.26})$$

A.3.3 Schubspannung der Phase

Mit der diskretisierten Form des Materialgesetzes für lineare Elastizität und dem Materialgesetz für Viskosität kann der Schubspannungstensor einer Phase hergeleitet werden.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^v = \dot{\varepsilon}_{ij,I}^{el,d} + \dot{\varepsilon}_{ij,I}^{cr,d} \quad (\text{A.27})$$

$$= - \left(\frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{\Delta t} \left(\frac{2}{E_I^{ti+1}} - \frac{1}{E_I^{ti}} \right) - \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right) - \frac{\tau_{ij,I}^{ti+1}}{2 \mu_I} \quad (\text{A.28})$$

$$= -\tau_{ij,I}^{ti+1} \left(\frac{1}{2 \mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}} \right) + \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \quad (\text{A.29})$$

Durch Transformation der Gleichung:

$$\tau_{ij,I}^{ti+1} = - \frac{\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^v - \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}}}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} = \frac{\frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}^v}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \quad (\text{A.30})$$

und Substitution einzelner Terme:

$$A_{1,ij,I} = \frac{\tau_{ij,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} + \dot{\epsilon}_{ij}^v \quad (\text{A.31})$$

$$B_{1,I} = \frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}} \quad (\text{A.32})$$

erhält man die Schubspannung der Phase I in Abhängigkeit der Gesamtdehnungsrate $\dot{\epsilon}_{ij}$ in einer linearen Form:

$$\tau_{ij,I}^{ti+1} = \frac{A_{1,ij,I} - \dot{\epsilon}_{ij}}{B_{1,I}} = -\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{B_{1,I}} + \frac{A_{1,ij,I}}{B_{1,I}} \quad (\text{A.33})$$

A.3.4 Schubspannung des Mehrphasengefüges

Für das Mehrphasengefüge gilt Phasenparallelschaltung, wobei die Schubspannung linear aus den Schubspannungen der Einzelphasen zusammengesetzt ist.

$$\tau_{ij} = \sum_I^m g_I \tau_{ij,I}^{ti+1} \quad (\text{A.34})$$

$$= g_1 \left(-\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{B_{1,I}} + \frac{A_{1,ij,I}}{B_{1,I}} \right) + \dots + g_m \left(-\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{B_{1,m}} + \frac{A_{1,m}}{B_{1,m}} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$= \dot{\epsilon}_{ij} \left(-\frac{g_I}{B_{1,I}} - \dots - \frac{g_m}{B_{1,m}} \right) + \frac{g_I A_{1,ij,I}}{B_{1,I}} + \dots + \frac{g_m A_{1,m}}{B_{1,m}} \quad (\text{A.36})$$

$$= \dot{\epsilon}_{ij} \sum_I^m \frac{-g_I}{B_{1,I}} + \sum_I^m \frac{g_I A_{1,ij,I}}{B_{1,I}} \quad (\text{A.37})$$

Mit einer zweiten Substitution:

$$A_2 = \sum_I^m \frac{-g_I}{B_{1,I}} \quad (\text{A.38})$$

$$B_{2,ij} = \sum_I^m \frac{g_I A_{1,ij,I}}{B_{1,I}} \quad (\text{A.39})$$

ist auch für die Schubspannung des Mehrphasengefüges ein linearer Term entwickelt worden:

$$\tau_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} A_2 + B_{2,ij} \quad (\text{A.40})$$

Anhang B

Temperaturbilanz

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten ist mit

$$\rho \cdot r \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{B.1})$$

gegeben. Es gilt das erste Fouriersche Gesetz.

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{B.2})$$

B.1 Diskretisierung

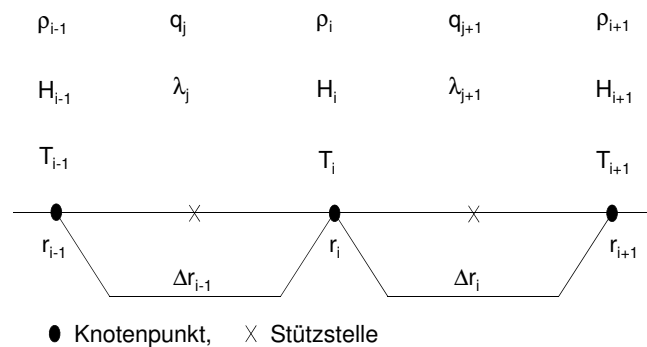


Abbildung B.1: Diskretisierung der Enthalpiebilanz

Für die Knotenpunkte i gilt:

* Radius	r_i	[m]
* Temperatur	T_i	[K]
* Enthalpie	H_i	[J kg ⁻¹]
* Dichte	ρ_i	[kg m ⁻³]

Für die Stützstellen j gilt:

* Wärmeleitfähigkeit	λ_j	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
* Wärmestromdichte	q_j	[J m ⁻² s ⁻¹]

Die zeitliche Entwicklung der Enthalpie kann nach Jablonka [Jab95] als linear angenommen werden.

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{H_{i,ti+1} - H_{i,ti}}{\Delta t} \quad (\text{B.3})$$

Um die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung zu lösen, müssen noch die Dichte und der Radius diskretisiert werden. Entsprechend der schematischen Darstellung der Diskretisierungsvorschrift liegt der Radius auf den Knotenpunkten. Die Dichte wird durch die vorgegebene (thermodynamische) Dichte ρ^{th} substituiert, die auch auf die Knotenpunkten gelegt wird.

$$\rho \cdot r \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \approx \rho_i^{th} \cdot r_i \cdot \frac{H_{i,ti+1} - H_{i,ti}}{\Delta t} \quad (\text{B.4})$$

Die räumliche Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (rechte Seite der Gleichung) muss so geschrieben werden, dass eine Entwicklung der Größen am Knotenpunkt i stattfindet. Um die partielle Ableitung als Differenzenquotienten für den Knotenpunkt formulieren zu können, ist es notwendig, die Wärmestromdichte und den Radius an den Stützstellen um den Knotenpunkt i zu betrachten. Der Radius r_i kann linear auf die Stützstellen interpoliert werden.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot q) \approx \frac{\frac{r_{i+1} + r_i}{2} q_{j+1} - \frac{r_i + r_{i-1}}{2} q_j}{\frac{r_{i+1} + r_i}{2} - \frac{r_i + r_{i-1}}{2}} = \frac{(r_{i+1} + r_i) q_{j+1} - (r_i + r_{i-1}) q_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{B.5})$$

Für die Wärmestromdichte gilt das erste Fouriersche Gesetz. Werden die Wärmeleitfähigkeiten λ_j an den Stützstellen betrachtet, lässt sich die Wärmestromdichte einfach für die Stützstellen formulieren.

$$q_j \approx -\lambda_j \frac{T_i - T_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \quad (\text{B.6})$$

Die diskretisierte Wärmeleitungsgleichung ist dann:

$$\rho_i^{th} \cdot r_i \cdot \frac{H_{i,ti+1} - H_{i,ti}}{\Delta t} = \frac{(r_{i+1} + r_i) \left(-\lambda_{j+1} \frac{T_{i+1} - T_i}{r_{i+1} - r_i} \right) - (r_i + r_{i-1}) \left(-\lambda_j \frac{T_i - T_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right)}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{B.7})$$

Die Gleichung (B.7) lässt sich auf folgende Form bringen:

$$A_i \cdot T_{i-1} + B_i \cdot T_i + B'_i \cdot H_{i,ti+1} + C_i \cdot T_{i+1} = D_i \cdot H_{i,ti} \quad (\text{B.8})$$

Das sich mit Gleichung (B.8) ergebende lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt, da $2n$ -Unbekannte vorkommen, aber nur n Gleichungen existieren. Das gilt, wenn H und T unabhängig voneinander sind. H und T sind aber durch eine Funktion miteinander verknüpft, sodass ein nichtlineares Gleichungssystem resultiert. Mit Hilfe des allgemeinen iterativen Lösen von Gleichungssystemen lässt sich aber eine Größe als Iterationsvorgänger definieren, sodass es möglich wird ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Die von Spitzer [SS99] angewandte Methode sieht vor, die Gleichung (B.8) mit einem für Konvergenz verschwindenden Term

$$\frac{H_{i,ti+1}^{it}}{H_{i,ti+1}^{it-1}} \approx 1 \quad (\text{B.9})$$

zu erweitern und den Ausdruck $B'_i \cdot H_i^{ti+1}$ und die Temperatur als Iterationsvorgänger zu interpretieren. Es ergibt sich:

$$\frac{A_i \cdot T_{i-1}^{it-1}}{H_{i-1,ti+1}^{it-1}} \cdot H_{i-1,ti+1}^{it} + \frac{B_i \cdot T_{i,ti+1}^{it-1}}{H_{i,ti+1}^{it-1}} \cdot H_{i,ti+1}^{it} + \frac{B'_i \cdot H_{i,ti+1}^{it-1}}{H_{i,ti+1}^{it-1}} \cdot H_{i,ti+1}^{it} + \frac{C_i \cdot T_{i+1,ti+1}^{it-1}}{H_{i+1,ti+1}^{it-1}} \cdot H_{i+1,ti+1}^{it} = D_i \cdot H_{i,ti} \quad (\text{B.10})$$

Es resultiert schließlich ein lineares Gleichungssystem.

$$a_i \cdot H_{i-1,ti+1}^{it} + b_i \cdot H_{i,ti+1}^{it} + c_i \cdot H_{i+1,ti+1}^{it} = d_i \quad (\text{B.11})$$

B.2 Ausformulierung Koeffizienten

Die Koeffizienten der Gleichung (B.11) ergeben sich zu:

$$a_i = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_j (r_i + r_{i-1})}{\Delta r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \cdot \frac{T_{i-1,ti+1}^{it-1}}{H_{i-1,ti+1}^{it-1}} \quad (\text{B.12})$$

$$b_i = \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda_{j+1} (r_{i+1} + r_i)}{\Delta r_{i+1} (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} + \frac{\Delta t \cdot \lambda_j (r_i + r_{i-1})}{\Delta r_i (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \right) \cdot \frac{T_{i,ti+1}^{it-1}}{H_{i,ti+1}^{it-1}} + \rho_{i,ti+1}^{it-1} \cdot r_i \quad (\text{B.13})$$

$$c_i = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_{j+1} (r_{i+1} + r_i)}{\Delta r_{i+1} (\Delta r_{i+1} + \Delta r_i)} \cdot \frac{T_{i+1,ti+1}^{it-1}}{H_{i+1,ti+1}^{it-1}} \quad (\text{B.14})$$

$$d_i = \rho_{i,ti+1}^{it-1} \cdot r_i \cdot H_{i,ti} \quad (\text{B.15})$$

B.3 Randbedingungen

B.3.1 Innenseite

Für die Innenseite gilt die Symmetrierandbedingung, es tritt kein Wärmestrom in radialer Richtung auf.

$$q_{j=2} = 0 = \lambda_{j=2} \frac{T_{i=2} - T_{i=1}}{r_{i=2} - r_{i=1}} \quad (\text{B.16})$$

Daraus ergibt sich:

$$T_{i=1} = T_{i=2} \quad (\text{B.17})$$

und nach der Enthalpieerweiterung folgt:

$$T_{i=1} - \frac{T_{i=2,ti+1}^{it-1}}{H_{i=2,ti+1}^{it-1}} \cdot H_{i=2,ti+1}^{it} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Bezugnehmend auf die Form der Gleichung (B.11) ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$a_1 = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$b_1 = 1 \quad (\text{B.20})$$

$$c_1 = -\frac{T_{i=2,ti+1}^{it-1}}{H_{i=2,ti+1}^{it-1}} \quad (\text{B.21})$$

$$d_1 = 0 \quad (\text{B.22})$$

Es folgt daraus, dass an der Stelle $r_{i=1}$ keine Enthalpie betrachtet wird! Dieses hat Auswirkungen auf den Koeffizienten a_2 der zweiten Zeile des Gleichungssystems. Der Koeffizient a_2 wird daher nicht mit der Enthalpie erweitert und ergibt sich demnach zu:

$$a_2 = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_2 (r_2 + r_1)}{\Delta r_2 (\Delta r_3 + \Delta r_2)} \quad (\text{B.23})$$

und die zweite Zeile des Gleichungssystems dann zu:

$$a_2 \cdot T_{i=1,ti+1}^{it} + b_2 \cdot H_{i=2,ti+1}^{it} + c_2 \cdot H_{i=3,ti+1}^{it} = d_2 \quad (\text{B.24})$$

B.3.2 Außenseite

An der Blockaußenseite wird der Wärmestrom aus dem Block durch einen Wärmeübergangskoeffizienten h und der Umgebungstemperatur T_{Umg} beschrieben.

$$q_n = -\lambda_n \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta r_n} = h(T_n - T_{Umg}) \quad (\text{B.25})$$

Aus der Gleichung ergibt sich:

$$-\frac{\lambda_n}{\Delta r_n} T_{n-1} + \frac{\lambda_n}{\Delta r_n} T_n + h \cdot T_n = h \cdot T_{Umg} \quad (\text{B.26})$$

mit der Enthalpieerweiterung dann:

$$-\frac{\lambda_n}{\Delta r_n} \frac{T_{n-1,t_{i+1}}^{j-1}}{H_{n-1,t_{i+1}}^{j-1}} \cdot H_{n-1,t_{i+1}}^j + \left(\frac{\lambda_n}{\Delta r_n} + h \right) T_{n,t_{i+1}}^j = h \cdot T_{Umg} \quad (\text{B.27})$$

Bezugnehmend auf die Form der Gleichung (B.11) ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$a_n = -\frac{\lambda_n}{\Delta r_n} \frac{T_{n-1,t_{i+1}}^{j-1}}{H_{n-1,t_{i+1}}^{j-1}} \quad (\text{B.28})$$

$$b_n = \frac{\lambda_n}{\Delta r_n} + h \quad (\text{B.29})$$

$$c_n = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$d_n = h \cdot T_{Umg} \quad (\text{B.31})$$

Es folgt daraus, dass an der Stelle $r_{i=n}$ keine Enthalpie betrachtet wird! Dieses hat Auswirkungen auf den Koeffizienten c_{n-1} der vorletzten Zeile des Gleichungssystems. Der Koeffizient c_{n-1} wird daher nicht mit der Enthalpie erweitert und ergibt sich demnach zu:

$$c_{n-1} = -\frac{\Delta t \cdot \lambda_n (r_n + r_{n-1})}{\Delta r_n (\Delta r_n + \Delta r_{n-1})} \quad (\text{B.32})$$

und die vorletzte Zeile des Gleichungssystems dann zu:

$$a_{n-1} \cdot H_{n-2,t_1}^{it} + b_{n-1} \cdot H_{n-1,t_1}^{it} + c_{n-1} \cdot T_{n,t_1}^{it} = d_{n-1} \quad (\text{B.33})$$

Anhang C

Impulsbilanz

Es gilt die Impulsbilanz in radialer Richtung in Zylinderkoordinaten für den rotationssymmetrischen verallgemeinerten ebenen Dehnungszustand.

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \tau_{\theta\theta} + r \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (\text{C.1})$$

C.1 Diskretisierung der Impulsbilanz

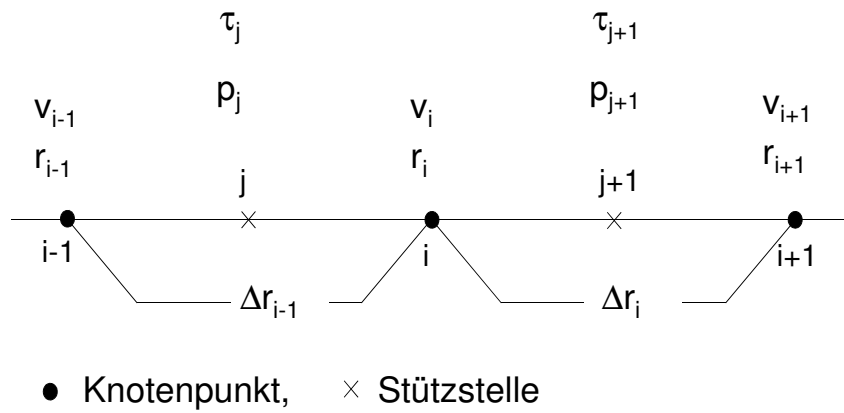


Abbildung C.1: Diskretisierung der Impulsbilanz

Für die Knotenpunkte i gilt:

* Radius	r_i	[m]
* Geschwindigkeit	v_i	[m s ⁻¹]

Für die Stützstellen j gilt:

* Schubspannung	τ_j	[N m ⁻²]
* Druck	p_j	[N m ⁻²]

Die räumliche Entwicklung der radialen Schubspannung τ_{rr}

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) \quad (\text{C.2})$$

soll am Knotenpunkt i ausgewertet werden. Wird der Radius linear auf die Stützstellen inter-

poliert, so ergibt sich für den Knotenpunkt i folgender Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) \approx \frac{\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \tau_{rr,j+1} - \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \tau_{rr,j}}{\frac{r_{i+1} + r_i}{2} - \frac{r_i + r_{i-1}}{2}} = \frac{(r_{i+1} + r_i) \tau_{rr,j+1} - (r_i + r_{i-1}) \tau_{rr,j}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{C.3})$$

Die Schubspannung $\tau_{\theta\theta}$ ist an sich an den Stützstellen definiert und muss daher auf die Knotenpunkte interpoliert werden.

$$\tau_{\theta\theta} \approx \frac{\tau_{\theta\theta,j+1} + \tau_{\theta\theta,j}}{2} \quad (\text{C.4})$$

Der Ausdruck

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{C.5})$$

muss ebenfalls an den Knotenpunkten ausgewertet werden. Um den Differenzenquotienten bilden zu können, wird der Radius auf die Stützstellen linear interpoliert. Die radiale Entwicklung des Drucks an den Knotenpunkten lässt sich dann ermitteln, da der Druck auf den Stützstellen liegt.

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \approx r_i \frac{\frac{p_{j+1} - p_j}{\frac{r_{i+1} + r_i}{2} - \frac{r_i + r_{i-1}}{2}}}{2} = 2 r_i \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{C.6})$$

Es resultiert die diskretisierte Impulsbilanz:

$$0 = \frac{(r_{i+1} + r_i) \cdot \tau_{rr,j+1} - (r_i + r_{i-1}) \cdot \tau_{rr,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})} - \frac{1}{2} (\tau_{\theta\theta,j+1} + \tau_{\theta\theta,j}) + 2 r_i \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{C.7})$$

Das Materialgesetz für die Schubspannungskomponenten gilt in der linearen Form:

$$\tau_{ij} = A_2 \dot{\epsilon}_{ij} + B_{2,ij} \quad (\text{C.8})$$

Eingesetzt in die diskretisierte Impulsbilanz (Gleichung (C.7)) liefert

$$0 = \frac{(r_{i+1} + r_i) \cdot (\dot{\epsilon}_{rr} A_2 + B_{2,rr})_{j+1} - (r_i + r_{i-1}) \cdot (\dot{\epsilon}_{rr} A_2 + B_{2,rr})_j}{(r_{i+1} - r_{i-1})} - \frac{1}{2} \left[(\dot{\epsilon}_{\theta\theta} A_2 + B_{2,\theta\theta})_{j+1} + (\dot{\epsilon}_{\theta\theta} A_2 + B_{2,\theta\theta})_j \right] + 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad (\text{C.9})$$

Die Verschiebungsgeschwindigkeiten sind den Dehnungsgeschwindigkeiten proportional und lassen sich einfach diskretisieren:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr,j} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta,j} &= \frac{v_r}{r} \approx \frac{v_i + v_{i-1}}{r_i + r_{i-1}} \end{aligned}$$

und somit:

$$0 = \frac{(r_{i+1} + r_i) \cdot \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{r_{i+1} - r_i} A_{2,j+1} + B_{2,rr,j+1} \right)}{(r_{i+1} - r_{i-1})} - \frac{(r_i + r_{i-1}) \cdot \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} A_{2,j} + B_{2,rr,j} \right)}{(r_{i+1} - r_{i-1})} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_{i+1} + v_i}{r_{i+1} + r_i} A_{2,j+1} + B_{2,\theta\theta,j+1} \right) + \left(\frac{v_i + v_{i-1}}{r_i + r_{i-1}} A_{2,j} + B_{2,\theta\theta,j} \right) \right] + 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}}$$

Durch eine Substitution ist die weitere Umformulierung der Impulsbilanz übersichtlicher.

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{(r_{i+1} + r_i) A_{2,j+1}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} & E_3 &= \frac{1}{2} \frac{A_{2,j+1}}{r_{i+1} + r_i} \\
B_3 &= \frac{(r_{i+1} + r_i) B_{2,rr,j+1}}{(r_{i+1} - r_{i-1})} & F_3 &= \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j+1} \\
C_3 &= \frac{(r_i + r_{i-1}) A_{2,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} & G_3 &= \frac{1}{2} \frac{A_{2,j}}{r_i + r_{i-1}} \\
D_3 &= \frac{(r_i + r_{i-1}) B_{2,rr,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})} & H_3 &= \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j} \\
& & I_3 &= 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}}
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= [(v_{i+1} - v_i)A_3 + B_3] - [(v_i - v_{i-1})C_3 + D_3] \\
&\quad - [(v_{i+1} + v_i)E_3 + F_3] - [(v_i + v_{i-1})G_3 + H_3] + I_3
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}
&= v_{i+1} A_3 - v_i A_3 + B_3 - v_i C_3 + v_{i-1} C_3 - D_3 \\
&\quad - v_{i+1} E_3 - v_i E_3 - F_3 - v_i G_3 - v_{i-1} G_3 - H_3 + I_3
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Aus der Gleichung (C.11) erhält man die gesuchten Koeffizienten der Gleichung:

$$a_i v_{i-1} + b_i v_i + c_i v_{i+1} = d_i \tag{C.12}$$

C.2 Ausformulierung Koeffizienten der Impulsbilanz

C.2.1 Koeffizient a_i der Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
a_i = C_3 - G_3 &= \left(\frac{(r_i + r_{i-1}) A_{2,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{A_{2,j}}{r_i + r_{i-1}} \right) \\
&= A_{2,j} \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})} \right) \\
&= \left(\sum_I^m \frac{1}{\frac{2}{\mu_I} + \frac{-g_I}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_j \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})} \right)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

C.2.2 Koeffizient b_i der Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
b_i &= -A_3 - E_3 - C_3 - G_3 \\
&= -\left(\frac{(r_{i+1} + r_i) A_{2,j+1}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)}\right) - \left(\frac{1}{2} \frac{A_{2,j+1}}{r_{i+1} + r_i}\right) \\
&\quad - \left(\frac{(r_i + r_{i-1}) A_{2,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})}\right) - \left(\frac{1}{2} \frac{A_{2,j}}{r_i + r_{i-1}}\right) \\
&= A_{2,j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)}\right) \\
&\quad + A_{2,j} \left(\frac{(-1) \cdot (r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})}\right) \\
&= \left(\sum_I^m \frac{-g_I}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}}\right)_{j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)}\right) \\
&\quad + \left(\sum_I^m \frac{-g_I}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}}\right)_j \left(\frac{(-1) \cdot (r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})} - \frac{1}{2(r_i + r_{i-1})}\right)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

C.2.3 Koeffizient c_i der Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
c_i = A_3 - E_3 &= \left(\frac{(r_{i+1} + r_i) A_{2,j+1}}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)}\right) - \left(\frac{1}{2} \frac{A_{2,j+1}}{r_{i+1} + r_i}\right) \\
&= A_{2,j+1} \left(\frac{(r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)}\right) \\
&= \left(\sum_I^m \frac{-g_I}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}}\right)_{j+1} \left(\frac{(r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} - \frac{1}{2(r_{i+1} + r_i)}\right)
\end{aligned} \tag{C.15}$$

C.2.4 Koeffizient d_i der Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
d_i &= -B_3 + D_3 + F_3 + H_3 - I_3 \\
&= -\left(\frac{(r_{i+1} + r_i) B_{2,rr,j+1}}{(r_{i+1} - r_{i-1})}\right) + \left(\frac{(r_i + r_{i-1}) B_{2,rr,j}}{(r_{i+1} - r_{i-1})}\right) + \left(\frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j+1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j}\right) - \left(2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}}\right) \\
&= B_{2,rr,j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})}\right) + B_{2,rr,j} \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j+1} + \frac{1}{2} B_{2,\theta\theta,j} - 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \\
&= \left(\sum_I^m \frac{g_I \left(\frac{\tau_{rr,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right)}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_{j+1} \left(\frac{(-1) \cdot (r_{i+1} + r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})} \right) \\
&\quad + \left(\sum_I^m \frac{g_I \left(\frac{\tau_{rr,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right)}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_j \left(\frac{(r_i + r_{i-1})}{(r_{i+1} - r_{i-1})} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_I^m \frac{g_I \left(\frac{\tau_{\theta\theta,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right)}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_{j+1} + \frac{1}{2} \left(\sum_I^m \frac{g_I \left(\frac{\tau_{\theta\theta,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right)}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_j \\
&\quad - 2 \cdot r_i \cdot \frac{p_{j+1} - p_j}{r_{i+1} - r_{i-1}} \tag{C.16}
\end{aligned}$$

C.3 Randbedingungen der Impulsbilanz

C.3.1 Innenseite (Impulsbilanz)

An der Innenseite gilt die Symmetrierandbedingung. Es findet keine Verschiebung statt.

$$a_1 = 0 \tag{C.17}$$

$$b_1 = 1 \tag{C.18}$$

$$c_1 = 0 \tag{C.19}$$

$$d_1 = 0 \tag{C.20}$$

C.3.2 Außenseite (Impulsbilanz)

An der Außenseite ist die Radialspannung gleich dem Außendruck.

$$\sigma_{rr,n} = \tau_{rr,n} + P_n = P_{\text{Umg}} \quad (\text{C.21})$$

$$\left(\dot{\varepsilon}_{rr} \frac{1}{2} A_2 + B_{2,rr} \right)_n = P_{\text{Umg}} - P_n \quad (\text{C.22})$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} \frac{1}{2} A_{2,n} = P_{\text{Umg}} - P_n - B_{2,rr,n} \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} A_{2,n} = P_{\text{Umg}} - P_n - B_{2,rr,n} \quad (\text{C.24})$$

Somit ergeben sich folgende Koeffizienten

$$a_n = -\frac{A_{2,n}}{r_n - r_{n-1}} \quad (\text{C.25})$$

$$b_n = \frac{A_{2,n}}{r_n - r_{n-1}} \quad (\text{C.26})$$

$$c_n = 0 \quad (\text{C.27})$$

$$d_n = P_{\text{Umg}} - P_n - B_{2,rr,n} \quad (\text{C.28})$$

$$a_n = -\frac{2}{r_n - r_{n-1}} \left(\sum_I^m \frac{-g_I}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_n \quad (\text{C.29})$$

$$b_n = \frac{2}{r_n - r_{n-1}} \left(\sum_I^m \frac{-g_I}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_n \quad (\text{C.30})$$

$$c_n = 0 \quad (\text{C.31})$$

$$d_n = P_{\text{Umg}} - P_n - \left(\sum_I^m \frac{g_I \left(\frac{\tau_{rr,I}^{ti}}{\Delta t E_I^{ti+1}} \right)}{\frac{1}{2\mu_I} + \frac{2}{\Delta t E_I^{ti+1}} - \frac{1}{\Delta t E_I^{ti}}} \right)_n \quad (\text{C.32})$$

Anhang D

Materialdaten

D.1 Enthalpie von Eisen und Eisen-Kohlenstofflegierungen

Die Wärmebilanz macht die Kenntnis der Enthalpieverläufe der auszuwertenden Legierungen notwendig. Stehen thermodynamische Programme zur Verfügung, lassen sich die benötigten Enthalpieverläufe sowohl für reine Eisenkohlenstoff- als auch für Stahllegierungen leicht ermitteln. Aber auch mit den tabellarisch dokumentierten Enthalpiewerten thermodynamischer Standardwerke lassen sich durch Polynomfunktionen Enthalpieverläufe für reine Eisenkohlenstofflegierungen und in guter Annäherung auch für niedrig legierte Stähle rechnen.

D.1.1 Enthalpien der reinen Phasen

Die in diesem Modell angewendeten Formeln zur Berechnung der Enthalpie sind aus der Arbeit von Harste [Har89] übernommen worden. In dieser sind für die Enthalpien von reinem Eisen aus den Tabellenwerken von Elliot [JFE60] und Hultgren [ea74] Polynomansätze in Abhängigkeit von der Temperatur (Temperatur in K) formuliert worden. Die entwickelten Funktionen gelten alle für die reinen Phasen des Eisens und sind nur für bestimmte Temperaturbereiche gültig.

$$H^0(T) = H_u + a \cdot T + b \cdot T^2 + c \cdot T^{-1} + d \cdot T^3 \quad [J/kg] \quad (D.1)$$

Nicht immer sind aber alle Koeffizienten notwendig, um den Enthalpieverlauf zu beschreiben. Für die einzelnen Phasen des Eisens ergeben sich folgende Gleichungen, Temperatur in [K]:

$$T \geq 1809 : H_l^0(T) = -104642,3 + 824,6157 T \quad (D.2)$$

$$1665 \leq T < 1809 : H_\delta^0(T) = 50882,26 + 441,3942 T + 8,872118 \cdot 10^{-2} T^2 \quad (D.3)$$

$$1184 \leq T < 1665 : H_\gamma^0(T) = 93453,72 + 429,8495 T + 7,48901 \cdot 10^{-2} T^2 \quad (D.4)$$

$$1060 \leq T < 1184 : H_\alpha^0(T) = 1,282244 \cdot 10^7 - 10068,18 T + 2,99343 T^2 - 5,217657 \cdot 10^9 T^{-1} \quad (D.5)$$

$$1042 \leq T < 1060 : H_\alpha^0(T) = -1,8379674 + 34871,21 T - 16,013229 T^2 \quad (D.6)$$

$$1000 \leq T < 1042 : H_\alpha^0(T) = 5780384 - 11501,07 T + 6,238181 T^2 \quad (D.7)$$

$$800 \leq T < 1000 : H_\alpha^0(T) = 4055624,6 - 4720,324 T + 2,291682 T^2 - 1,109483 \cdot 10^9 T^{-1} \quad (D.8)$$

$$298 \leq T < 800 : H_\alpha^0(T) = -85766,26 + 504,8146 T - 6,555695 \cdot 10^{-2} T^2 + 5187583,4 T^{-1} + 1,495553 \cdot 10^{-4} T^3 \quad (D.9)$$

Neben den Funktionen für reines Eisen sind in analoger Weise auch Funktionen für reinen Kohlenstoff (Graphit) und Zementit entwickelt worden. Die Herleitung bezieht sich dabei auf Daten von JANAF [JAN68] und Kubaschewski [Kub67]. Die Temperatur hat die Einheit Kelvin.

$$1100 \leq T < 4073 : H_G^0(T) = -124724,7 + 2036,041 T + 1,812466 \cdot 10^{-2} T^2 \\ 2,634753 \cdot 10^8 T^{-1} \quad (D.10)$$

$$298 \leq T < 1100 : H_G^0(T) = -87755,32 + 9,060235 T + 1,621966 T^2 \\ + 1,23385 \cdot 10^7 T^{-1} - 4,82738 \cdot T^{-4} T^3 \quad (D.11)$$

$$463 \leq T < 1500 : H_Z^0(T) = 31560,1 + 597,4564 T + 3,49807 \cdot 10^{-2} T^2 \quad (D.12)$$

$$273 \leq T < 463 : H_Z^0(T) = 49446,11 + 458,036 T + 0,233205 T^2 \quad (D.13)$$

D.1.2 Enthalpien der Mischphasen

Grundsätzlich setzt sich die Enthalpie einer Mischphase H_{MP} aus der Summe der Enthalpien der reinen Stoffe H^0 zusammen, die mit ihrem Gewichtsanteil w gewichtet werden. Die Mischphasen sind keine idealen Mischungen, sodass die Mischungsenthalpie ΔH^M berücksichtigt werden muss.

$$H_{MP} = \sum_i w_i H_i^0 + \Delta H^M \quad (D.14)$$

Harste [Har89] vernachlässigt die Mischungswärme für δ - und α -Ferrit auf Grund derer geringen Kohlenstofflöslichkeit. Für die flüssige und die γ -Phase sind dagegen Formeln in Abhängigkeit des Kohlenstoffgehalts entwickelt worden. Es ist die Annahme getroffen worden, dass die Mischungswärmen unabhängig von der Temperatur sind und für den gesamten Bereich des Austenits bzw. der Schmelze gelten.

$$\Delta H_l^M = 36601 \cdot \%C + 1,90793 \cdot 10^6 \frac{\%C^2}{43,839 \%C + 1201,1} \quad (D.15)$$

$$\Delta H_\gamma^M = 18125 \cdot \%C + 1,96612 \cdot 10^6 \frac{\%C^2}{43,839 \%C + 1201,1} \quad (D.16)$$

D.1.3 Enthalpien der heterogenen Gebiete

Die Enthalpien der heterogenen Gebiete H_{hG} setzt sich additiv aus den Enthalpien der reinen Stoffe oder der Mischphasen zusammen, die mit ihrem Massenanteil multipliziert werden.

$$H_{hG} = \sum_i f_i H_i \quad (D.17)$$

D.2 Wärmeleitfähigkeit von Eisen und Eisen-Kohlenstofflegierungen

In dieser Arbeit wird vorwiegend das Schrumpfungsverhalten von reinen Eisenkohlenstofflegierungen untersucht. Die thermische Leitfähigkeit wird daher auch mit den Formeln nach Harste [Har89] beschrieben. Andere Gleichungen zur Berechnung der thermischen Leitfähigkeit finden sich bei Wray [Wra80] für reines Eisen und bei Miettinen [Wra80], [ML94] für Stähle.

Die thermische Leitfähigkeit der Legierung setzt sich additiv aus den Leitfähigkeiten der einzelnen Phasen zusammen.

$$\lambda = \sum_i f_i \cdot \lambda_i \quad (\text{D.18})$$

D.2.1 Wärmeleitfähigkeit von reinen Eisen

Harste [Har89] entwickelt die Formeln für die festen Phasen aus veröffentlichten Daten, die sich auf direkt gemessene Wärmeleitfähigkeiten beziehen. Der Einfluss des Reinheitsgrads der untersuchten Eisen auf die thermische Leitfähigkeit bei niedrigen Temperaturen ist bei der Auswertung der Daten berücksichtigt worden.

$$\lambda_\alpha(T) = 80,91 - 9,9269 \cdot 10^{-2} \cdot T + 4,613 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 \quad (\text{D.19})$$

$$\lambda_\gamma(T) = 20,14 + 9,313 \cdot 10^{-3} \cdot T \quad (\text{D.20})$$

$$\lambda_\delta(T) = 21,6 + 8,35 \cdot 10^{-3} \cdot T \quad (\text{D.21})$$

$$\lambda_l(T) = 39 \quad (\text{D.22})$$

Die thermische Leitfähigkeit hat die Einheit $[\text{W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}]$, die Temperatur $[^\circ\text{C}]$. Die Leitfähigkeit für die flüssige Phase ist konstant. Um die Konvektion in der Schmelze zu simulieren, wird mit einer effektiven Leitfähigkeit gerechnet. Die Leitfähigkeit wird dabei um einen bestimmten Betrag erhöht, hier um das fünffache. Die abnehmende Konvektion im heterogenen Gebiet erfordert eine Absenkung der Leitfähigkeit auf den ursprünglichen Wert. Daher ist die Erhöhung mit dem Massenanteil der flüssigen Phase f_l gekoppelt.

$$\lambda_l^{\text{eff}}(T) = \lambda_l(T) \cdot (1 + 4 \cdot f_l^{100}) \quad (\text{D.23})$$

D.2.2 Wärmeleitfähigkeit der Eisen-Kohlenstofflegierungen

Der Einfluss auf die thermische Leitfähigkeit bei niedrigeren Temperaturen ist hoch, sodass dieser mit in die Gleichungen eingehen muss. Harste [Har89] wertet dafür Untersuchungsergebnisse von Kohlenstoffstählen aus und findet für die thermische Leitfähigkeit des α -Ferrit folgende Korrekturformel:

$$\lambda_\alpha(T, [\text{wt}\%C]) = \lambda_\alpha(T) \cdot (1 - k_1 \cdot [\text{wt}\%C]^{k_2}) \quad (\text{D.24})$$

$$k_1 = 0,425 - 4,385 \cdot 10^{-4} \cdot T \quad (\text{D.25})$$

$$k_2 = 0,209 - 1,09 \cdot 10^{-3} \cdot T \quad (\text{D.26})$$

Die Temperatur hat die Einheit $[^\circ\text{C}]$. Mit zunehmender Temperatur nimmt der Einfluss des Kohlenstoffgehalts auf die thermische Leitfähigkeit ab. Folglich ist eine Korrektur des Austenits und des δ -Ferrits nicht notwendig.

D.3 Dichte von Eisen und Eisenkohlenstofflegierungen

Sowohl das klassische Spannungsmodell als auch das hydro-mechanische Modell rechnen mit der Dichte. In beiden Fällen ist die Dichte Variable in der Wärmebilanz und Variable zur Berechnung der thermischen Kontraktion. Auch für die Dichte werden die von Harste [Har89] und von Schwerdtfeger et al. [JHS91] hergeleiteten Formeln zur Berechnung der Dichte benutzt, da diese in Abhängigkeit der Temperatur und des Kohlenstoffgehalts geschrieben sind.

Für den heterogenen Bereich gilt die reziproke, massenbezogene Mischformel, in der die Dichten der einzelnen Phasen ρ_i durch ihren Massenanteil f_i dividiert werden.

$$\frac{1}{\rho} = \sum_i \frac{f_i}{\rho_i} \quad (\text{D.27})$$

D.3.1 Dichte von reinen Eisen und Zementit

Zur Ermittlung der Dichten von reinen Eisen sind drei unterschiedliche Arten von Literaturstellen ausgewertet worden, nämlich Daten zur Messung der thermischen Ausdehnung, der Dichte und der Gitterkonstanten. Die Temperaturen haben die Einheit [°C].

$$\rho_\alpha(T) = 7880,76 - 0,3244T - 2,7461 \cdot 10^{-5} T^2 \quad (\text{D.28})$$

$$\rho_\gamma(T) = 8150,91 - 0,5091T \quad (\text{D.29})$$

$$\rho_\delta(T) = 8010,71 - 0,4724T \quad (\text{D.30})$$

$$\rho_l(T) = 7965,98 - 0,619T \quad (\text{D.31})$$

Die Auswertung für den Zementit ergibt

$$T \leq 394: \rho_Z(T) = 1,5644 \cdot 10^{-5} - 1,3032 \cdot 10^{-6} T + 2,605 \cdot 10^{-8} T^2 \quad (\text{D.32})$$

$$T > 394: \rho_Z(T) = -28,91 + 1,61 \cdot 10^{-5} T \quad (\text{D.33})$$

Temperatur in Grad Celsius.

D.3.2 Dichte von Eisenkohlenstofflegierungen

Die Dichtekorrektur des α -Ferrits wird wegen seiner geringen Kohlenstofflöslichkeit vernachlässigt. Die Literatursauswertung von Harste [Har89] und die darauf basierenden Fits ergeben folgende Korrekturformeln für den Austenit und δ -Ferrit

$$\rho_{T, \%C} = \rho(T, \%C = 0) \cdot \left(1 + \frac{\%C}{100 - \%C}\right) \cdot (1 + k_i \%C)^{-3} \quad (\text{D.34})$$

$$k_\gamma = 8,317 \cdot 10^{-3} \quad (\text{D.35})$$

$$k_\delta = 13,34 \cdot 10^{-3} \quad (\text{D.36})$$

D.4 Thermische Dehnung

Ist ε^{th} die thermische Dehnung und gilt Isotropie, dann folgt

$$\begin{aligned}\varepsilon^{th} &= \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{b - b_0}{b_0} = \frac{h - h_0}{h_0} \\ 1 + \varepsilon^{th} &= \frac{l}{l_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{h}{h_0}\end{aligned}\tag{D.37}$$

Für die Änderung des Volumens kann die volumetrische Dehnung definiert werden

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(l \cdot d \cdot h) - (l_0 \cdot d_0 \cdot h_0)}{l_0 \cdot d_0 \cdot h_0}\tag{D.38}$$

und weiterführend

$$\begin{aligned}\frac{V}{V_0} &= \frac{l \cdot d \cdot h}{l_0 \cdot d_0 \cdot h_0} \\ &= (1 + \varepsilon^{th})^3\end{aligned}\tag{D.39}$$

folglich ergibt sich für die thermische Dehnung

$$\varepsilon^{th} = \sqrt[3]{\frac{V}{V_0}} - 1\tag{D.40}$$

bzw. bei konstanter Masse

$$\varepsilon^{th} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}} - 1\tag{D.41}$$

D.5 Elastizitätsmodul

Der Elastizitätsmodul ist ein materialspezifischer Proportionalitätsfaktor, der den linearen Zusammenhang zwischen Spannung und reversibler Dehnung wiedergibt. Der Elastizitätsmodul ist für Temperaturen unterhalb 600°C gut zu bestimmen und daher bekannt. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Fließgrenze von Stahl ab, sodass die Bestimmung des Elastizitätsmoduls schwieriger wird. Dementsprechend finden sich in der Literatur nur wenige Formeln zur Berechnung des Elastizitätsmoduls bei hohen Temperaturen, einige davon werden im Anhang miteinander verglichen.

Neben der Notwendigkeit der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls, ist bei phasenabhängiger Modellierung des Materialverhaltens eine phasenspezifische Formulierung des Elastizitätsmoduls von Vorteil. Entsprechende Formeln zur Berechnung des Elastizitätsmoduls finden sich in der Arbeit von Harste [Har89]. Diese gelten zwar primär für reines Eisen, Harste [Har89] stellt jedoch fest, dass die Gleichungen auch für Eisen-Kohlenstoff-Legierungen mit Kohlenstoffgehalten bis zu 1,5 wt%C gute Ergebnisse liefern.

$$T \leq 500 : E_{\alpha}(T) = E_{20} (1,005986 - 2,986725 \cdot 10^{-4} T - 2,812962 \cdot 10^{-8} T^2 - 1,680235 \cdot 10^{-10} T^3 - 2,0306034 \cdot 10^{-14} T^4) \quad (\text{D.42})$$

$$T > 500 : E_{\alpha}(T) = E_{20} (2,908514 - 1,3608563 \cdot 10^{-2} T + 3,4170575 \cdot 10^{-5} T^2 - 3,8124995 \cdot 10^{-8} T^3 + 1,5137473 \cdot 10^{-11} T^4) \quad (\text{D.43})$$

$$E_{\gamma}(T) = E_{20} (0,981 - 4,76 \cdot 10^{-4} T) \quad (\text{D.44})$$

$$E_{\delta}(T) = E_{20} (0,925 - 4,98 \cdot 10^{-4} T) \quad (\text{D.45})$$

E_{20} ist der Elastizitätsmodul bei einer Temperatur von 20°C.

$$E_{20} = 208060 \quad (\text{D.46})$$

Die Einheit des Elastizitätsmoduls ist MN/m² und die der Temperatur °C. In dem Modell dieser Arbeit werden die Formeln stets den existierenden Phasen zugeordnet, auch wenn diese außerhalb des für die Formeln gültigen Temperaturintervalls liegen.

D.6 Kriechgesetze

Stahl verhält sich bei hohen Temperaturen viskoplastisch. Die thermisch aktivierten Kriechvorgänge machen eine Modellierung des Materialverhaltens und die Bestimmung von Proportionalitätskonstanten schwierig. Es existiert daher eine Vielzahl von Modellen, die von der einfachen Form des Norton Gesetzes bis hin zu komplexen hyperbolischen Gesetzen reichen. Kozlowski et al. [KTAW92] vergleichen diese unterschiedliche Modelltypen mit gemessenen Daten von Wray [Wra76], [Wra82] und Suzuki et al. [STWS88]. Weitere Vergleiche von Kriechgesetzen finden sich bei Fachinotti [FC03] und Bernhard [PBC05].

In der Regel vernachlässigen die Kriechgesetze primäres und tertiäres Kriechen und gelten nur für den linearen Zusammenhang zwischen Gesamtdehnung und Zeit (sekundäres Kriechen). So auch die in diesem Modell benutzten Formeln, die aus den Arbeiten von Schwerdtfeger et al. [HSS92],[HS96] stammen.

Obwohl es für das Kriechgesetz des Austenits eine Korrekturformel bezüglich des Kohlenstoffgehalts gibt, wird diese hier im ersten Ansatz vernachlässigt, um einen besseren Vergleich mit den Spannungsergebnissen von Harste [Har89] zu haben. Eine Korrekturformel für den Ferrit ist nach Schwerdtfeger [HS96] auf Grund des geringen Einflusses auf die Ergebnisse vernachlässigbar.

Die Gleichung für den Austenit gilt für Dehnraten von 10^{-3} bis 10^{-6} s^{-1} .

$$\dot{\varepsilon}_{\gamma}^{cr} = 7,0 \cdot 10^{17} \left(\frac{\sigma_{\gamma}}{E_{\gamma}} \right)^3 \sinh \left(\frac{60,137 \cdot \sigma_{\gamma}}{T} \right) \exp \left[-\frac{Q_{\gamma}}{RT} \right] \quad (\text{D.47})$$

Die Aktivierungsenergie ist für diese Gleichung konstant.

$$Q_{\gamma} = 272000 \quad \text{J / mol} \quad (\text{D.48})$$

Die Gleichung für die Ferrite hat eine ähnliche Struktur wie die des Austenits.

$$\dot{\varepsilon}_{\delta}^{cr} = 2,6 \cdot 10^{17} \left(\frac{\sigma_{\delta}}{E_{\delta}} \right)^{2,5} \sinh \left(\frac{156,355 \cdot \sigma_{\delta}}{T} \right) \exp \left[-\frac{Q_{\delta}}{RT} \right] \quad (\text{D.49})$$

Die Aktivierungsenergie ist dagegen von der Temperatur abhängig (Temperatur in Kelvin).

$$T < 925 : \quad Q_{\delta} = 290000 - 31,749 T \quad (\text{D.50})$$

$$925 \leq T < 1041,15 : \quad Q_{\delta} = 15511459 + 32911,2625 T \ln(T) - 17,789871 T^2 \\ 224808,883 T \quad (\text{D.51})$$

$$1041,15 \leq T < 1125 : \quad Q_{\delta} = 52443174 + 928056426 T \ln(T) - 41,246952 T^2 \\ 652009,597 T \quad (\text{D.52})$$

$$T \geq 1125 : \quad Q_{\delta} = 240000 \quad (\text{D.53})$$

Anhang E

Zweidimensionale FEM-Scheibe

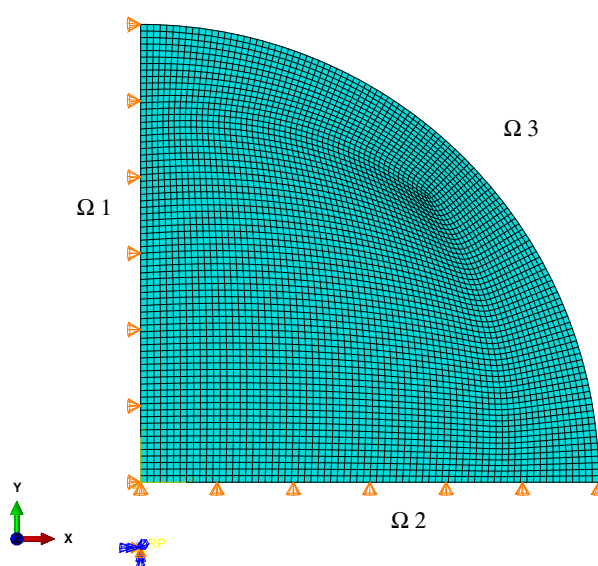


Abbildung E.1: Vernetzte Scheibe

Die Abbildung (E.1) zeigt eine zweidimensionale FEM-Scheibe, mit der die Vergleichsrechnungen in dem Programm ABAQUS durchgeführt worden sind. Das Scheibenviertel ist mit 4675 CPEG4T-Elementen vernetzt worden. Das sind Elemente, die zum einen den für thermomechanische Rechnungen gelten, als auch den verallgemeinerten ebenen Zustand berücksichtigen. Für die Innen liegenden Ränder $\Omega 1$ und $\Omega 2$ der Scheibe gelten Symmetrierandbedingungen, das heißt die Verschiebung in x-Richtung auf dem Rand $\Omega 1$ ist gleich null $u_x(\Omega 1) = 0$ und die Verschiebung in y-Richtung auf dem Rand $\Omega 2$ ist gleich null, $u_y(\Omega 2) = 0$. Der Rand $\Omega 3$ ist losgelagert. Thermisch ist die Scheibe an den Rändern $\Omega 1$ und $\Omega 2$ isoliert, $q(\Omega 1) = q(\Omega 2) = 0$. Am Rand $\Omega 3$ gilt eine thermische Randbedingung, wobei für diese ein Wärmeübergangskoeffizient h und eine Umgebungstemperatur T_{Umg} vorgegeben werden müssen.

Um den verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustand zu erhalten, müssen zusätzliche Randbedingungen definiert werden. Dazu mußte ein Referenzpunkt (RP) erstellt werden. An diesem gelten Symmetrierandbedingungen für die x- und y-Achse ($\text{XSYMM} = \text{U1} = \text{UR2} = \text{UR3} = 0$ und $\text{YSYMM} = \text{U2} = \text{UR1} = \text{UR3} = 0$). Diese verhindern das Durchbiegen und Rotieren der Scheibe, lassen aber eine axiale (Z-Richtung) Bewegung zu.

Literaturverzeichnis

- [BH04] M Bellet and A Heinrich, *A Two-dimensional Finite Element Thermomechanical Approach to a Global Stress-Strain Analysis of Steel Continuous Casting*, ISIJ International **44** (2004), no. 10, 1686–1695.
- [BJP04] M Bellet, O Jaouen, and I Poitroult, *An ALE-FEM approach to the thermomechanics of solidification processes with application to the prediction of pipe shrinkage*, International Journal for Numerical Methods in Heat & Fluid Flow **15** (2004), no. 2, 120–142.
- [BR02] G Bisio and G Rubatto, *Process improvements in iron and steel industry by analysis of heat and mass transfer*, Energy Conversion and Management **43** (2002), 205–220.
- [BT96] B B A W Barber and J P Tunstall, *Strand straightening in the continuous casting of steel*, IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry **7** (1996), 181–196.
- [BT07] M Bellet and B G Thomas, *Solidification Macroprocesses (Modeling of stress, distortion and hot tearing)*, Materials processing handbook (J R Groza, J F Shackelford, E J Lavernia, and M T Powers, eds.), CRC Press, 2007, pp. 1–26.
- [CT05] L Chunsheng and B G Thomas, *Thermomechanical finite-element model of shell behavior in continuous casting of steel*, Metallurgical and Materials Transactions B **35B** (2005), no. 6, 1151–1172.
- [DP05] F Dunne and N Petrinic, *Introduction to Computational Plasticity*, Oxford University Press, 2005.
- [ea74] R Hultgren et al., *Selected values of the thermodynamic properties of metals and alloys*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [FC03] V D Fachinotti and A Cardona, *Constitutive models of steel under continuous casting conditions*, Journal of Materials Processing Technology **135** (2003), no. 1, 30–43.
- [FC07] ———, *A fixed-mesh Eulerian-Lagrangian approach for stress analysis in continuous casting*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **70** (2007), no. 6, 728–755.
- [FP08] J H Ferziger and M Peric, *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, doi:10.1007/978-3-540-68228-8.

- [GBW76] A Grill, J K Brimacombe, and F Weinberg, *Mathematical Analysis of Stresses in Continuous Casting of Steel*, Ironmaking and Steelmaking **3** (1976), no. 1, 38–47.
- [GM90] Fjaer H G and A Mo, *ALSPEN—a Mathematical Model for Thermal Stresses in Direct Chill Casting of Aluminum Billets*, Metallurgical Transactions B **21B** (1990), no. 6, 1049–1061.
- [Gom03] A Gomez, *Quantitative description of the mechanical properties of TRIP alloys*, Diplomarbeit, Inst. für Metallurgie, TU-Clausthal, 9 2003.
- [Gre03] R Greve, *Kontinuumsmechanik. Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*, Springer, Berlin, 2003.
- [Har89] K Harste, *Untersuchungen zur Schrumpfung und zur Entstehung von mechanischen Spannungen während der Erstarrung und nachfolgender Abkühlung zylindrischer Blöcke aus Fe-C-Legierungen*, Ph.D. thesis, TU Clausthal, 1989, Dissertation.
- [Har09] S Hartmann, *Introduction to Theory of Materials*, Lecture Notes, TU Clausthal, 2009.
- [HCF00] A E Huespe, A Cardona, and V Fachinotti, *Thermomechanical model of a continuous casting process*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **182** (2000), no. 3, 439–455.
- [Hib09] L C Hibbeler, *Thermo-Mechanical behavior during steel continuous casting in funnel molds*, Master’s thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2009.
- [HLY⁺99] H N Han, J E Lee, T Yeo, Y M Won, K Kim, K H Oh, and J K Yoon, *A Finite Element Model for 2-Dimensional Slice of Cast Strand*, ISIJ International **39** (1999), no. 5, 445–454.
- [HS96] K Harste and K Schwerdtfeger, *Thermomechanical properties of iron: viscoplasticity of ferrite and austenite-ferrite mixtures*, Materials Science and technology **12** (1996), 378–384.
- [HSS92] K Harste, T Suzuki, and K Schwerdtfeger, *Thermomechanical properties of steel: viscoplasticity of γ iron and γ Fe-C alloys*, Materials Science and technology **8** (1992), 23–33.
- [Jab95] A Jablonka, *Spannung und Deformationen in Elektro-Schlacke-Umschmelzblöcken während des Umschmelzens, der nachfolgenden Abkühlung und der sich anschließenden Wärmebehandlung*, Ph.D. thesis, TU Clausthal, Aug 1995.
- [JAN68] JANAF, *thermochemical tables*, NBS Inst. Appl. Tech., Michigan, 1965–68.
- [JFE60] M Gleise J F Elliot, *Thermochemistry for steelmaking*, vol. 1, Addison-Wesley, 1960.
- [JHS91] A Jablonka, K Harste, and K Schwerdtfeger, *Thermomechanical properties of iron and iron-carbon alloys*, steel research **63** (1991), no. 1, 24–33.

-
- [KBL⁺04] J Kron, M Bellet, A Ludwig, B Pustal, J Wendt, and H Fredriksson, *Comparison of numerical simulation models for predicting temperature in solidification analysis with reference to air gap formation*, International Journal of Cast Metals Research **17** (2004), no. 5, 295–310.
- [KHT09] S Koric, L C Hibbeler, and B G Thomas, *Explicit coupled thermo-mechanical finite element model of steel solidification*, Int. J. Numer. Meth. Engng **78** (2009), 1–31.
- [KMO⁺88] J E Kelly, K P Michalek, T G OConnor, B G Thomas, and J A Dantzig, *Initial Development of Thermal and Stress Fields in Continuously Cast Steel Billets*, Metallurgical Transactions A **19A** (1988), no. 10, 2589–2602.
- [Kri82] J O Kristiansson, *Thermal Stresses in the Early Stage of Solidification of Steel*, Journal of Thermal Stresses **5** (1982), no. 3–4, 315–330.
- [Kri84] ———, *Thermomechanical Behavior of the Solidifying Shell Within Continuous-Casting Billet Molds—a Numerical Approach*, Journal of Thermal Stresses **7** (1984), no. 3–4, 209–226.
- [KT06] S Koric and B G Thomas, *Efficient thermo-mechanical model for solidification processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **66** (2006), no. 12, 1955–1989.
- [KTAW92] P F Kozlowski, B G Thomas, J A Azzi, and H Wang, *Simple Constitutive Equations for Steel at High Temperature*, Metallurgical and Materials Transactions A **23A** (1992), 903–918.
- [Kub67] O Kubaschewski, *Metallurgical thermochemistry*, Pergamon Press, London, 1967.
- [Lag04] A Lagerstedt, *On the shrinkage of metals and its effect in solidification processing*, Ph.D. thesis, KTH, Materials Science and Engineering, 2004, <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-75>.
- [LKYF05] A Lagerstedt, J Kron, F Yosef, and H Fredriksson, *Measurements and modeling of air gap formation in iron-base alloys*, Materials Science and Engineering A **413–414** (2005), 44–51, International Conference on Advances in Solidification Processes.
- [LMR84] R W Lewis, K Morgan, and P M Roberts, *Determination of thermal stresses in solidification problems*, Numerical Analysis of Forming Processes (J F T Pittman, O C Zienkiewicz, R D Wood, and J M Alexander, eds.), John Wiley and Sons, 1984, pp. 405–431.
- [LT02] C Li and B G Thomas, *Maximum casting speed for continuous cast steel billets based on sub-mold bulging computation*, 85th Steelmaking Conf. Proc.; Nashville, TN, March 10–13, 2002 (Warrendale, PA) (ISS, ed.), 2002, pp. 109–130.
- [LT04] ———, *Thermomechanical Finite-Element Model of Shell Behavior in Continuous Casting of Steel*, Metallurgical and Materials Transactions B **35B** (2004), no. 6, 1151–1172.

-
- [LYO⁺00] J E Lee, T J Yeo, K H Oh, Yoon J K, and U S Yoon, *Prediction of Cracks in Continuously Cast Beam Blank Through Fully Coupled Analysis of Fluid Flow, Heat Transfer and Deformation Behavior of Solidifying Shell*, Metallurgical and materials transactions A **31A** (2000), no. 1, 225–237.
- [ML94] J Miettinen and S Louhenkilpi, *Calculation of thermophysical properties of carbon and low alloyed steels for modeling of solidification processes*, Metallurgical and Materials Transactions B **25** (1994), no. 6, 909–916, DOI:10.1007/BF02662773.
- [MT93] A Moitra and B G Thomas, *Application of a Thermo-Mechanical Finite Element Model of Steel Shell Behavior in the Continuous Slab Casting Mold*, Steelmaking Proceedings (Dallas, Texas), vol. 76, Iron and Steel Society, 1993, pp. 657–667.
- [MTS91] A Moitra, B G Thomas, and W Storkman, *Thermo-Mechanical Model of Steel Shell Behavior in the Continuous Casting Mold*, 3. EPD Congress 1992; San Diego, California; USA; 1-5 Mar. 1992, The Minerals, Metals, and Materials Society, Warrendale, March 1991, pp. 547–577.
- [OY88] I Ohnaka and Y Yashima, *Stress Analysis of Steel Shell Solidifying in Continuous Casting Mold*, Modeling of Casting and Welding Processes IV (Warrendale, Pa.), Minerals, Metals, and Materials Society, 1988, pp. 385–394.
- [Par03] H Parisch, *Festkörper-Kontinuumsmechanik*, Teubner, Stuttgart, 2003.
- [PBC05] R Pierer, C Bernhard, and C Chimani, *Evaluation of Common Constitutive Equations for Solidifying Steel*, Berg- und Hüttenmännische Monatshefte (BHM) **150** (2005), 163–169.
- [PH97] N H Pryds and J H Hattel, *Numerical modelling of rapid solidification*, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. **5** (1997), 451–472.
- [RGMN98] Boehmer J R, Funk G, Jordan M, and Fett F N, *Strategies for coupled analysis of thermal strain history during continuous solidification processes*, Advances in Engineering Software **29** (1998), no. 7-9, 679–697.
- [RHC03] J M Risso, A E Huespe, and A Cardona, *A generalized plane strain formulation for continuous casting simulation*, Mecanica Computacional (M. B. Rosales, V. H. Cortinez y D. V. Bambill (Editores), Bahia Blanca, Argentina) **XXII** (2003), 2513–2527.
- [SB77] K Sorimachi and J K Brimacombe, *Improvements in Mathematical Modelling of Stresses in Continuous Casting of Steel*, Ironmaking and Steelmaking **4** (1977), no. 4, 240–245.
- [Sch92] K.H. Spitzer; K. Harste; B. Weber; P. Monheim; K. Schwerdtfeger, *Mathematical Model for Thermal Tracking and On-line Control in Continuous Casting*, ISIJ International **32** (1992), no. 7, 848–856.
- [SMLM07] R Saraswat, D M Maijer, P D Lee, and K C Mills, *The Effect of Mould Flux Properties on Thermo-mechanical Behaviour during Billet Continuous Casting*, ISIJ International **47** (2007), no. 1, 95–104.

-
- [Spa82] S Patankar; D Spalding, *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*, International Journal of Heat and Mass Transfer **15** (1982), no. 1, 1787–1806.
- [SS99] K H Spitzer and K Schwerdtfeger, *Thermal tracking*, unknown, 2 1999.
- [SST98] K Schwerdtfeger, M Sato, and K H Tacke, *Stress formation in solidifying bodies. Solidification in a round continuous casting mold*, Metallurgical and Materials Transactions B **29B** (1998), no. 5, 1057–1068.
- [Ste99] I Steinert, *Mathematische Modelle zur Spannungs- und Rißentstehung beim Stranggießen*, Ph.D. thesis, RWTH Aachen, 1999.
- [STWS88] T Suzuki, K H Tacke, K Wünnenberg, and K Schwerdtfeger, *Creep Properties of Steel at Continuous Casting Temperatures*, Ironmaking and Steelmaking **15** (1988), no. 2, 90–100.
- [TBC95] G A Taylor, C Bailey, and M Cross, *Solution of the elastic/visco-plastic constitutive equations: A finite volume approach*, Applied Mathematical Modelling **19** (1995), no. 12, 746–760, doi:10.1016/0307-904X(95)00093-Y.
- [Tho03] B G Thomas, *Modeling of Continuous Casting*, The AISE Steel Foundation, Pittsburgh, PA, 2003.
- [TK89] T C Tszeng and S Kobayashi, *Stress analysis in solidification processes: Application to continuous casting*, International Journal of Machine Tools and Manufacture **29** (1989), no. 1, 121–140, doi:10.1016/0890-6955(89)90060-6.
- [WB63] J H Weiner and B A Boley, *Elasto-Plastic Thermal Stresses in A Solidifying Body*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **11** (1963), no. 3, 145–154.
- [WLM79] J R Williams, R W Lewis, and K Morgan, *An elasto-viscoplastic thermal stress model with applications to the continuous casting of metals*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **14** (1979), no. 1, 1–9.
- [Wra76] P J Wray, *Plastic Deformation of Delta-Ferritic Iron at Intermediate Strain Rates*, Metallurgical and Materials Transactions A **7A** (1976), 1621–1627.
- [Wra80] ———, *Mechanical, Physical and Thermal Data for Modeling the Solidification Processing of Steels*, Modeling of Casting and Welding Processes; Rindge; N.H. ; 3-8 Aug. 1980 (H D Brody, ed.), The Metallurgical Society of AIME, 1980, pp. 245–257.
- [Wra82] ———, *Effect of Carbon Content on the Plastic Flow of Plain Carbon Steels at Elevated Temperatures*, Metallurgical and Materials Transactions A **13A** (1982), no. 1, 125–134.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des Stranggießprozesses, aus Thomas [Tho03]	3
2.2	Schematische Darstellung des Kokillenbereichs, aus Thomas [Tho03]	4
3.1	Zweidimensioanles Längsmodell, aus Fachinotti [FC07]	8
3.2	Zweidimensioanles Quermodell in L-Form aus, Thomas [LT02]	8
3.3	Druck auf Erstarrungsfront, aus Li et al. [CT05]	9
4.1	Additive Aufteilung der Spannung am Beispiel eines Würfels, [Har09]	17
5.1	Mehrphasiges viskoplastisches Modell	22
5.2	Kopplung zwischen allgemeinen und einachsigen Spannungsmodell	26
6.1	Schematische Darstellung des Rundblocks	27
6.2	Druckzustand im heterogenen Gebiet	32
7.1	Diskretisierung Enthalpiebilanz	39
7.2	Diskretisierung der Impulsbilanz	40
7.3	Diskretisierung der Massenbilanz	42
7.4	Lösungsschema des hydro-mechanischen Konzeptmodells	46
8.1	Spannungsprofile der analytischen Lösung und des hydro-mechanischen Modells	50
8.2	Temperaturprofile der analytischen Lösung und des hydro-mechanischen Modells	50
8.3	Geschwindigkeits- und Phasenprofil nach 5 Sekunden	51
8.4	Rechengebiet Hibbeler [Hib09]	51
8.5	Radialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	54
8.6	Radialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	54
8.7	Tangentialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	55
8.8	Tangentialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	55
8.9	Axialdehnungen beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	56
8.10	Axialspannung beider Modelle für unterschiedliche Kompressibilitäten	56
8.11	Thermische Ausdehnungskoeffizient einer 0,1 wt% C Eisenkohlenstofflegierung	57
8.12	Relative Dichteabweichung unterschiedlicher Expansionskoeffizienten	60
8.13	Schrumpfungsverhalten unterschiedlicher Expansionskoeffizienten	60
8.14	Druckverläufe nach 100 s für kleinere Expansionskoeffizienten	61
8.15	Druckverläufe nach 100 s für größere Expansionskoeffizienten	61
8.16	Absolute Dichtedifferenz für $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4}$ und $\alpha = 3,0 \cdot 10^{-4}$	62
8.17	Dichten des hydro-mechanischen Modells	62
8.18	Schrumpfungsverläufe des hydro-mechanischen Modells für unterschiedliche Vis- kositäten	64

8.19 Radialspannungsverläufe des hydro-mechanischen Modells für unterschiedliche Viskositäten	64
8.20 Vergleich des Schrumpfungsverhalten beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten	66
8.21 Schrumpfungsdifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten . . .	66
8.22 Vergleich der Axialdehnung beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten . .	67
8.23 Axialdehnungsdifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten . .	67
8.24 Vergleich der Blockdichten beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten . . .	68
8.25 Blockdichtendifferenz der beiden Modelle für unterschiedliche Viskositäten . . .	68
8.26 Druckverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten	69
8.27 Radialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten	70
8.28 Tangentialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten . .	71
8.29 Axialspannungsverlauf beider Modelle für unterschiedliche Viskositäten	72
8.30 Schrumpfungskurven beider Modelle für 0,1 wt% C, $T = 1600$ [K]	74
8.31 Schrumpfungskurven beider Modelle für 0,1 wt% C, $T = 1700$ [K]	75
8.32 Abweichung der mittleren Dichte für 0,1 wt% C	75
8.33 Radialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C	76
8.34 Tangentialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C	76
8.35 Axialspannungsprofile beider Modelle für 0,1 wt%C	77
8.36 Druckprofile beider Modelle für 0,1 wt%C	77
8.37 Schrumpfung 0,1 wt%C, Zeitschritte	78
8.38 Radialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte	78
8.39 Tangentialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte	78
8.40 Axialspannung 0,1 wt%C, Zeitschritte	78
8.41 Druck 0,1 wt%C, Zeitschritte	78
8.42 Schrumpfung 0,1 wt%C, Knotenpunkte	79
8.43 Radialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte	79
8.44 Tangentialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte	79
8.45 Axialspannung 0,1 wt%C, Knotenpunkte	79
8.46 Druck 0,1 wt%C, Knotenpunkte	79
8.47 Schrumpfung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite	80
8.48 Radialspannung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite	80
8.49 Tangentialspannung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite	80
8.50 Axialspannung 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite	80
8.51 Druck 0,1 wt%C, Temperaturschrittweite	80
8.52 Schrumpfung 0,1 wt%C, Elementanzahl	81
8.53 Radialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl	81
8.54 Tangentialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl	81
8.55 Axialspannung 0,1 wt%C, Elementanzahl	81
8.56 Druck 0,1 wt%C, Elementanzahl	81
8.57 Druckprofil abgeschlossenes System	84
8.58 Druckprofil offenes System	84
8.59 Geschwindigkeitsprofil abgeschlossenes System	85
8.60 Geschwindigkeitsprofil offenes System	85
8.61 Geschwindigkeit und Radialspannung nach 10 Sekunden	86
8.62 Geschwindigkeit und Radialspannung nach 60 Sekunden	86
8.63 Radialspannungsverlauf bei unterschiedlichen Überdrücken in der Schmelze . . .	87

8.64	Spannungs- und Druckverlauf nach 100 Sekunden, 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5$ [N m ⁻²]	87
8.65	Druckprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5$ [N m ⁻²]	88
8.66	Radialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5$ [N m ⁻²]	88
8.67	Tangentialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5$ [N m ⁻²]	89
8.68	Axialspannungsprofil 0,1 wt% C mit $P_{\text{Liq}} = 1,3 \cdot 10^5$ [N m ⁻²]	89
8.69	Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Drücke, 0,1 wt% C	91
8.70	Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Axialkräfte, 0,1 wt% C	92
8.71	Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Umgebungstemperaturen, 0,1 wt% C	92
8.72	Schrumpfungsverhalten unterschiedliche Eisekohlenstofflegierungen	93
8.73	Vergleich von spalt- und zeitabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten	93
8.74	Vergleich von Radialspannung und -geschwindigkeit, 0,1 und 0,6 wt% C	96
8.75	Vergleich von Dichte- und Temperaturverlauf, 0,1 und 0,6 wt% C	96
8.76	Tangentialspannung und Phasen, 0,1 wt%C	97
8.77	Tangentialspannung, Phasen und Dichte, 0,6 wt%C	97
8.78	Tangentialspannung, Phasen und Druck, 0,6 wt%C	99
8.79	Axialdehnrate und Phasenanteile, 0,1 wt%C	100
8.80	Axialdehnrate und Phasenanteile, 0,6 wt%C	100
8.81	Variation Schrumpfung konstante Proportionalitätsvariablen	101
8.82	Variation Tangentialspannung konstante Proportionalitätsvariablen	102
8.83	Variation Axialdehnungsrate konstante Proportionalitätsvariablen	102
B.1	Diskretisierung der Enthalpiebilanz	113
C.1	Diskretisierung der Impulsbilanz	117
E.1	Vernetzte Scheibe	131

Symbolverzeichnis

Variablen und Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
c_P	spezifische Wärmekapazität	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
d	Spaltdicke	m
d_0	minimale Spaltdicke	m
E	Elastizitätsmodul	N m^{-2}
F	Kraft	N
g	Volumenanteil	
G	Schubmodul	N m^{-2}
h	Wärmeübergangskoeffizient	$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$
	Höhe	m
H	Enthalpie	J kg^{-1}
I	Einheitsmatrix	
$\%i$	Synonym für chemische Zusammensetzung	
K	Kompressionsmodul	N m^{-2}
l	flüssige Phase	
m	Masse	kg
\mathbf{P}	Drucktensor	N m^{-2}
P	Druck	N m^{-2}
q	Wärmestromdichte	$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$
r	Radius	m
t	Zeit	s
T	Temperatur	K
tr	Spur einer Matrix	
\mathbf{u}	Verschiebungstensor	m
$\hat{\mathbf{u}}$	vordefinierter Verschiebungstensor	m
\mathbf{v}	Geschwindigkeitstensor	m s^{-1}
v	Geschwindigkeit	m s^{-1}
V	Volumen	m^3
α	Relaxationsfaktor	
	linearer Expansionskoeffizient	K^{-1}
	α -Ferrit	
γ	Austenit	
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	
δ	δ -Ferrit	

ϵ	Deformationstensor	
ϵ_{ij}	Dehnungsmatrix	
ϵ	Dehnung	
$\dot{\epsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit	
$\bar{\epsilon}$	Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit	s^{-1}
$\bar{\epsilon}$	Vergleichsdehnung	
κ	Kompressibilität	$N^{-1} m^2$
λ	thermische Leitfähigkeit	$W m^{-1} K^{-1}$
μ	Viskosität	$s N m^{-2}$
ν	Querkontraktionszahl	
ρ	Dichte	$kg m^{-3}$
$\bar{\rho}$	mittlere Blockdichte	$kg m^{-3}$
σ	Spannungstensor	$N m^{-2}$
σ_{ij}	Spannungsmatrix	$N m^{-2}$
σ	Spannungs	$N m^{-2}$
$\bar{\sigma}$	Vergleichsspannung	$N m^{-2}$
$\dot{\bar{\sigma}}$	Vergleichsspannungsrate	$N m^{-2}$
τ	Schubspannungstensor	$N m^{-2}$
τ_{ij}	Schubspannungsmatrix	$N m^{-2}$
τ	Schubspannung	$N m^{-2}$
Φ	Oberflächenspannung	$N m^{-2}$
Ω	Rand	m
∇	Nabla-Operator	

Indizes

Index	Bedeutung
a	Außen
cr	Stoßdämpfer, viskos
d	deviatorisch
D	Druck
eff	effektiv
el	elastisch
f	Reibelement
ges	Gesamt: Dehnung
i	Laufindex Knotenpunkt
I	Phase
ie	inelastisch
it	Laufindex Iteration
j	Laufindex Stützstelle
k	künstlich
l	flüssige Phase
Liq	Liquidus
Ref	Referenzzustand
r	Radialkoordinate
s	feste Phase

t_i	Laufindex Zeit
th	thermisch, thermodynamisch
Umg	Umgebung
v	volumetrisch
y	Fließen
z	Axialkoordinate
α	α -Ferrit
γ	Austenit
δ	δ -Ferrit
θ	Tangentialkoordinate

Lebenslauf

Zur Person

Name:	Lars Martens
Geburtsdatum:	24. September 1979
Geburtsort:	Goch
Familienstand:	verheiratet eine Tochter

Ausbildung

1986 - 1990	St. Georg Grundschule Goch
1990 - 2000	Städtisches Gymnasium Goch
2001 - 2005	Universität Duisburg Essen <i>Gießereitechnik (Bachelor)</i>
2005 - 2007	Technische Universität Clausthal <i>Gießereitechnik (Diplom)</i>

Beruflicher Werdegang

2007 - 2010	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, TU Clausthal <i>Institut für Metallurgie</i> <i>Metallurgische Prozesstechnik</i>
seit September 2010	Saarstahl AG <i>Innovation Sekundärmetallurgie</i>

Saarbrücken, 03.02.2013

Lars Martens